O.V. 1797

Math. F. 477-2

Allgemein faßliche

Anleitung

zur

Algebra

durch

häufige Beyspiele erläutert;

zu

Ergänzung des mündlichen Unterrichts,

von

Gottlieb Friderich Rösler. Prof.

Zweyter und lezter Theil.

Stuttgart,
bei Erhard und Löflund.
1789.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Vorrede.

Es erscheinet hiemit der zweyte und lezte Theil der Algebra. Im dritten Abschnitte (dem ersten dieses Theils) endigt sich die Uebersetzung aus Mako, und zwar werden die im vorigen Abschnitte vorgetragene Gesetze auf wirkliche Auflösung der Gleichungen von verschiedenen Graden angewendet, und mehrere theils sehr leichte Methoden eingerükt. Der vierte Abschnitt trägt die Lehre von den Reihen ziemlich vollständig, sowohl im allgemeinen als nach besonderen Arten derselben vor. Da die Reihen, nächst den Verhältnissen, die Seele der reinen Mathematik ausmachen, so glaubte der Verfasser, solche nicht ausführlich genug, und nach allerley Behandlungsarten vortragen zu können. Der Augenschein wird lehren, wie ferne er diesen Endzweck erreicht hat. Dem vierten Kapitel dieses Abschnittes über das Newtonische Parallelogramm (eine eben so selten vollständig genug vorgetragene Rechnungsmethode) sind manche weitere

Gesetze und Eigenschaften der Reihen eingewebet. Im fünften Abschnitte sind vermischte algebraische Rechnungen enthalten, und je seltener sonst in den meisten Lehrbüchern die Behandlungsarten der continuirlichen Brüche, so wie auch des Interpolirens vorgetragen werden, desto nöthiger schien es dem Verfasser, diese Lehren hier einzurücken, und mit praktischen Beyspielen zu belegen. Nachdem von den Combinationen im dritten Kapitel dieses Abschnittes gehandelt worden, so lehret das vierte Kapitel den Anschlag der Zeit, und giebt sehr nützliche Formeln für die Interesse-Rechnung, die zugleich auf andere analogische Aufgaben benüzt werden, zu besonderer Anwendung der Logarithmischen Rechnung. Endlich werden im Anhange Formeln des Binomiums nach den verschiedenen Formen und Anwendungen desselben zusammengestellet, welches wegen ihrem so oft vorkommenden Gebrauch nicht ohne Nutzen seyn wird. Folgende Tafel giebt den genauern Innhalt an.

Stuttgart, im Sept. 1789.

Gottlieb Friderich Rösler,
Professor.

Innhalt.

Innhalt.

Der dritte Abschnitt.

Anwendung der bisher vorgetragenen Gesetze auf wirkliche Auflösung der Gleichungen von verschiedenen Graden. (Nach Mako, mit Zusätzen.)

Das erste Kapitel. Von Erfindung rationaler Gleichungen, durch welche eine gegebene Gleichung auf einen niedrigeren Grad herunter gebracht werden kann. S. 1

Das zweyte Kapitel. Von Auflösungen der Gleichungen zweyten Grades. S. 21

Das dritte Kapitel. Von Auflösungen der Gleichungen dritten Grades. S. 53

Das vierte Kapitel. Von Auflösungen der Gleichungen vierten Grades. S. 93

Das fünfte Kapitel. Von verschiedenen Annäherungsarten zu den Wurzeln. S. 111

Der vierte Abschnitt.

Von den Reihen.

Das erste Kapitel. Von den Reihen überhaupt, und ihren verschiedenen Arten. S. 128

Verwandlung der Brüche in unendliche Reihen. Summirung derselben. S. 138

Andere Arten, einen Bruch in eine unendliche Reihe zu verwandlen. S. 158

Innhalt.

Das zweyte Kapitel. Arithmetische Reihen. Polygonalzahlen. Differenzenreihen und ihre Anwendung.

Arithmetische Reihen. S. 175
Polygonalzahlen. S. 186
Differenzenreihen und ihre Anwendung. S. 193

Das dritte Kapitel. Potenzenreihen. Geometrische Reihen. Harmonische Reihen.

Potenzenreihen. S. 215
Geometrische Reihen. S. 234
Anhang. Harmonische Proportion und Reihe. S. 243

Das vierte Kapitel. Vom Newtonischen Parallelogramm, nebst weiteren Betrachtungen über die Eigenschaften der Reihen. S. 256

Der fünfte Abschnitt.
Vermischte algebraische Rechnungen.

Das erste Kapitel. Von den continuirlichen Brüchen, ihrer Bildung und Gebrauch. S. 287

Das zweyte Kapitel. Von den Interpolationsmethoden. S. 312

Das dritte Kapitel. Von den Verbindungen und Versetzungen der Grössen. S. 333

Das vierte Kapitel. Vom Anschlag der Zeit und Formeln zur Interesse- Renten- und analogischen Rechnungen.

I. Anschlag der Zeit. S. 345
II. Formeln zur Interesse-Rechnung. S. 347

Anhang. Formeln des Binomiums. S. 378

Dritter Abschnitt.

Anwendung der bisher vorgetragenen Gesetze auf wirkliche Auflösung der Gleichungen von verschiedenen Graden.

(Nach Mako, mit Zusätzen.)

Das erste Kapitel.

Von Erfindung rationaler Gleichungen, durch welche eine gegebene Gleichung auf einen niedrigeren Grad herunter gebracht werden kann.

§. 150.

Wenn eine Gleichung eine rationale Wurzel hat, so wird sich dieselbe genau durch eine einfache Gleichung dieser Form $x \pm a$ dividiren lassen, wo x das Unbekannte der Gleichung andeutet, und a die rationale Wurzel derselben (§. 98. Zus. 3.): Wenn man demnach solche einfache Gleichungen findet, aus denen die gegebene Gleichung zusammengesezt ist, so ist klar, daß man ihre rationale Wurzeln entdecke. Zu diesem Endzweck wollen wir noch ferner folgende Aufgaben beyfügen.

§. 151.

Aufgabe.

Man soll alle Divisoren einer gegebenen Zahl finden.

Aufl. Es sey irgend eine Zahl gegeben, z. B. 120, so ziehe man rechterhand derselben eine gerade verticale Linie, und schreibe gegen über 1, als den ersten Divisor; sodann versuche man die Division mit 2, und da diese von statten gehet, so schreibe man den Quotienten 60 unter 120, und den Divisor 2 gerade über, unter 1. Man versuche noch ferner durch 2 zu dividiren, und schreibe den Quotienten 30 unter 60 und gegen über den Divisor 2 unter 2, und multiplicire mit diesen 2 den porigen Divisor 2, und schreibe das Produkt 4 neben 2; so wird auch 4 ein Divisor der gegebenen Zahl 120 seyn. Denn wenn 120 durch 2 dividirt werden kann, und diese Hälfte 60 wieder durch 2, so kann in allweg die ganze Zahl durch 4 dividirt werden.

120	2
60	2
30	2, 4
15	2, 8
5	3, 6, 12, 24
1	5, 10, 15, 20, 30, 40, 60, 120.

Abermal dividire man 30 durch 2, und den Quotienten 15 schreibe man unter 30, und gegen über seinen Divisor 2, den man in vorhergehende Divisoren 2 und 4 multipliciren sollte; weil aber das Produkt 4 schon vorhin unter die Divisoren geschrieben worden, so darf 2 nur mit 4 multiplicirt werden, und das Produkt 8 schreibt man nach 2. Weil aber

der

der lezte Quotient 15 nun nicht mehr durch 2 dividirt werden kann, so versuche man die Division durch 3, und den Quotient 5 schreibe man unter 15, und gegen über der Divisor 3, der in die vorige Divisoren multiplicirt die Produkte 6, 12, 24 erzeuget, welche hinter 3 geschrieben werden. Weil endlich der lezte Quotient 5 nur allein durch 5 divisibel ist, so schreibe man den Quotienten 1 unter 5, und gegen über den Divisor 5, der in die vorige Divisoren 2, 3, 4, 6, 12, 24 dividirt, die folgende Produkte bringt: 10, 15, 20, 30, 40, 60, 120, welche man hinter 5 schreibt. Alle zur rechten Hand der Linie geschriebene Zahlen, von 1 angefangen, bis zu 120 werden die Divisoren der gegebenen Zahl seyn. Eben also verfähret man mit einer jeden anderen gegebenen Zahl.

*) Anmerkung.

Gewöhnlich ist hier nur von Faktoren die Rede, welche ganze Zahlen sind. Es kann sich aber jedoch auch mehrmal der Fall ereignen, daß man Brüche als Faktoren auszufinden hat. Wie z. B. Hr. Langsdorf in s. Erläuterungen der Kästnerischen Analysis endlicher Grössen, S. 85. das Beyspiel der Gleichung anführet:

$$x^3 - \frac{587}{24}x + \frac{265}{24}x - 1 = 0.$$

Hier hat das lezte Glied offenbar keine ganze Zahlen zu Faktoren, ausser ± 1; aber keiner von diesen, für x gesezt, bringt die Gleichung auf 0; und doch wäre der Schluß, daß es nun keine ganze Zahl zur Wurzel gebe, falsch. Das lezte Glied könnte nemlich, und muß nothwendig allemal ein Produkt aus ganzen Zahlen in Brüchen seyn. So könnten hier die drey Faktoren der 1 diese seyn: $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{94}$; 1128.

Denn $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{94} \cdot 1128 = 1$. Hier geräth man aber nun freylich auf eine höchst weitläufige Probe, denn es sollte eigentlich nicht nur mit den ganzen Zahlen, die das lezte Glied zu Faktoren hat, sondern überhaupt mit solchen ganzen Zahlen der Versuch gemacht werden, die auch mit Brüchen multiplicirt, das lezte Glied zum Produkt geben; d. i. man müßte mit allen möglichen ganzen Zahlen die Probe machen, ob irgend eine statt x gesezt, die Gleichung auf o bringt. So wird man z. B. hier finden, daß ein Faktor des lezten Gliedes 1 die Zahl 24 ist; welches man wohl schwerlich vermuthet hätte.

§. 152.

Aufgabe.

Den gemeinschaftlichen grösten Divisor zweyer Zahlen zu finden.

Aufl. Man dividire die grössere Zahl durch die kleinere; wenn die Division genau von statten gehet, so ist eben diese kleinere Zahl der gröste gemeinschaftliche Divisor. Wenn aber von voriger Division ein Rest übrig bleibt, so dividire man abermal den vorigen Divisor durch diesen Rest, und sofort immer den vorigen Divisor, durch den Rest bey lezter Division; bis man eine Division ohne allen Rest erhält: der Divisor dieser lezten Division ist sodann der gemeinschaftliche Divisor der gegebenen Zahlen.

Beweis. Es seyen die gegebenen Zahlen a und b: wenn die Zahl b, m mal in der Zahl a enthalten ist, und es bleibt der Rest c, so wird eine jede

Zahl

Zahl x, welche die Zahlen a und b misset, auch den Rest c messen. Denn es ist $a = bm + c$, folglich $a - bm = c$; Nun misset aber x nach der Voraussetzung das a, und b, also auch das vielfache, Multiplum, desselben bm: demnach misset x das $a - bm$, oder den Rest c. Ferner, dieser erste Rest c sey nmal in b enthalten, und lasse zum zweyten Rest d, so wird jene Zahl x auch d messen, denn es ist $b = cn + d$, folgl. $b - cn = d$, und nach der Voraussetzung misset x das b, und nach dem erwiesenen misset es auch c, also auch dessen Multiplum cn, und demnach die ganze Zahl $b - cn$, oder den zweyten Rest d, u. s. f.

Daher nach irgend einer Anzahl von Divisionen jene Zahl x auch den lezten Rest messen wird, und wenn nun dieser lezte Rest den vorhergehenden genau dividirt, so wird er das gemeinschaftliche Maß der Zahlen a und b seyn. Denn es sey jener lezte Rest d, der den Rest c misset, c mal r, so ist $c = rd$; es ist aber $a = bm + c$, und $b = cn + d$: da also d das c misset, so misset es auch $cn + d$, oder b, und eben deßwegen auch $bm + c$ oder a. Also ist d das gemeinschaftliche Maß der Zahlen a und b. Daß es aber das gröste Maß sey, erhellet daraus. Nach dem erwiesenen muß jedes gemeinschaftliche Maß x der Zahlen a und b auch den Rest d messen; nun aber ist die gröste Zahl, welche die Zahl d misset, d selbst; folglich ist d das gemeinschaftliche gröste Maß der Zahlen a und b.

Z. B. Man suchet den grösten gemeinschaftlichen Divisor der Zahlen 637 und 143. Man dividire die erste durch die lezte, so bleibet zum ersten Rest 65. Man dividire nun den ersten Divisor 143 durch diesen Rest, so ist der zweyte Rest 13.

Noch weiter dividire man vorigen Divisor 65 durch diesen Rest, so bleibt nichts übrig; und also ist der gemeinschaftliche gröste Divisor der gegebenen Zahlen 13.

§. 153.

Zusatz 1. Wenn man den gemeinschaftlichen grösten Divisor mehrerer Zahlen finden soll, so sucht man zuerst den grösten gemeinschaftlichen Divisor von 2 Zahlen, wie oben; sodann den gemeinschaftlichen grösten Divisor dieses gefundenen Divisors und der dritten gegebenen Zahl; sodann den Divisor des neuen gefundenen Divisors und der vierten gegebenen Zahl, u. s. f.

§. 154.

Wenn man bey jenen Divisionen auf keinen Rest kommt, durch den der vorhergehende Divisor genau dividirt werden kann, so ist es ein Anzeigen, daß die gegebene Zahlen kein gemeinschaftliches Maß haben, ausser der Einheit, also unter sich Primzahlen (*numeri inter se primi*) seyen, wie z. B. die Zahlen 13 und 23.

§. 155.

Aufgabe.

Einfache Gleichungen dieser Form $x \pm a = o$ zu finden, wodurch eine gegebene Gleichung dividirt, oder auf den niedrigeren Grad x depримirt werden könne.

Aufl. Da das lezte Glied einer Aequation das Produkt ist, aus allen Wurzeln derselben mit verkehrten

ten Zeichen genommen, (§. 99.) so ist klar, daß alle rationale Wurzeln, wenn die gegebene Gleichung dergleichen hat, unter den Divisoren des lezten Gliedes begriffen seyen. Man suche demnach alle Divisoren des lezten Gliedes, (§. 151.) und formire aus ihnen, sowohl positiv als negativ genommen, und aus dem Unbekannten, so die Gleichung enthält, einfache Gleichungen dieser Form: $x + a = o$ oder $x - a = o$, und versuche, ob sich durch diese die Gleichung dividiren lasse. Wenn dieses angehet, so ist offenbar, daß die gegebene Gleichung aus jenen einfachen entstanden sey, durch welche sie genau dividirt werden kann; und daß daher die Werthe a, welche in ihnen das Unbekannte hat, die rationale Wurzeln der gegebenen Gleichung seyen.

Z. B. Man suchet die einfache Divisoren oder rationale Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = o$$

so sind die Divisoren des lezten Gliedes 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Man versuche also die Division durch die einfache Gleichungen $x \pm 1$, $x \pm 2$, $x \pm 3$. ꝛc. da nun diese durch $x - 2$, durch $x + 3$, und durch $x - 4$ genau von statten geht, so ist klar, daß die Wurzeln der gegebenen Gleichung 2, -3, und 4 seyen, wie solches leicht erhellet, wenn man die Substitution vornimmt.

§. 156.

Zusatz 1. Bey der Probe mit diesen Divisionen kann man sich vielen Vortheil und Abkürzung dadurch verschaffen: 1.) Wenn man die Gleichung in eine andere transformiret, worinnen das lezte Glied wenigere Divisoren hat (§. 113. 2.) Wenn man die Gränzen bestimmt, zwischen denen die Wurzeln

enthalten sind (§. 121. folg.). 3.) Wenn man aus dem Abwechslen oder Gleichbleiben der Zeichen beurtheilt, ob die Wurzeln positiv oder negativ seyen (§. 100. Zus. 3.). 4.) Wenn man, im Fall alle Wurzeln positiv, oder alle negativ sind, die Divisoren verwirft, welche den Coefficienten des zweyten Gliedes übersteigen. (§. 99.)

Z. B. In der Gleichung $x^3 - 9x^2 + 22x - 8 = 0$ zeiget die Beschaffenheit der Zeichen, daß alle Wurzeln positiv seyen, man hat also allein durch die positiven Divisoren der Zahl 8 die Division zu versuchen, oder blos durch die einfache Gleichungen $x - 1$, $x - 2$, $x - 4$, $x - 8$, und es gehet mit $x - 4$ an, also ist 4 eine Wurzel der gegebenen Gleichung.

Zusatz 2. Wenn einmal eine Wurzel gefunden ist, so werden die anderen desto leichter herausgebracht, wenn die Aequation durch die einfache Gleichung, die aus der gefundenen Wurzel zusammengesezt ist, dividirt, und also um einen Grad deprimirt wird: denn eine Gleichung von einem niedrigeren Grad, die daraus entsteht, wird die übrige Wurzeln enthalten.

Z. B. Es werde die Gleichung gegeben:

$$x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$$

diese läßt sich dividiren durch $x - 2$, also ist 2 eine von ihren Wurzeln. Hiedurch wird sie reducirt auf

$$x^3 - 2x^2 - 23x + 60 = 0$$

wo die Division durch $x - 3$ von statten gehet, daher eine Wurzel 3 ist, und aus dieser 2ten Division entspringt die Gleichung:

$$x^2 + x - 20 = 0$$

welche, durch $x - 4$ dividirt, sich in

$$x + 5 = 0$$

ver-

verwandelt; also sind ihre Wurzeln 4 und —5. Und daher die Wurzeln jener gegebenen Gleichung 2, 3, 4, —5.

Zusatz 3. Wenn eine gegebene Gleichung durch irgend eine andere einfache Gleichung, die aus dem unbekannten und aus denen sowohl positiv als negativ genommenen Divisoren des lezten Gliedes zusammengesezt ist, nicht dividirt werden kann, so ist es ein Anzeigen, daß sie gar keine rationale Wurzel habe.

Zusatz 4. Man kann die rationale Wurzeln auch ohne Division herausbringen, wenn man nemlich nach und nach statt der unbekannten Grösse die Divisoren des lezten Gliedes, sowohl positiv als negativ genommen, substituirt; denn welche von ihnen die Gleichung verificiren oder auf o bringen werden, sind Wurzeln derselben.

Z. B. Wenn in der Gleichung $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = o$ aus den Divisoren des lezten Gliedes statt x substituirt werden 1, 1, 3, so kommt immer für den Werth der Gleichung o; also sind eben diese Divisoren ihre Wurzeln.

Anmerkung. Allein die ganze bisherige Methode ist weitläufig, wenigstens verdrüßlich, wenn das lezte Glied der Gleichung mehrere Divisoren zulässet. Es folget daher eine Aufgabe, durch deren Hülfe aus mehreren Divisoren des lezten Gliedes diejenigen bestimmt werden sollen, die mit der unbekannten Grösse die einfache Aequationen formiren, wodurch die gegebene Gleichung genau dividirt werden kann.

§. 157.

Aufgabe.

Die Divisoren des lezten Gliedes zu bestimmen, welche mit der unbekannten Grösse einfache Gleichungen formiren, durch die eine gegebene Gleichung genau dividirt werden kann.

Aufl. In der gegebenen Gleichung substituire man statt der unbekannten Grösse nach und nach die Glieder der arithmetischen Progression 1, 0, — 1 ꝛc. und bemerke gegen über in einer 2ten Columne die Werthe der Gleichung, so daraus herkommen, denen in einer dritten Columne gegen über alle ihre Divisoren beygeschrieben werden. Unter den sowohl positiv als negativ genommenen Divisoren die jenen verschiedenen Stellen zukommen, suche man eine arithmetische Progression, deren einzelne Glieder, unter den einzelnen Stellen correspondirenden Divisoren genommen, um eine Einheit abnehmen, und schreibe diese Progression in eine vierte Columne: das Glied dieser Progression, das mit der Stelle $x = 0$ correspondiret, nehme man für a, und versuche die Division durch $x + a$. Gehet diese durch kein solchergestalt gefundenes Glied a von statten, so zeigt sich, daß ein Divisor dieser Form unmöglich sey; der übrigens, wenn er möglich ist, durch diese Methode allemal gefunden wird.

Beweis. Es sey der gesuchte Divisor $x + a$, worinnen, wenn für x irgend eine Zahl substituirt wird, jene Zahl, worein sich sodann $x + a$ verwandelt, nothwendig ein Divisor des Werthes seyn wird, den die gegebene Gleichung erhält, wenn in ihr ebenfalls statt x diese Zahl substituirt wird: daher,

wenn

wenn in der gegebenen Gleichung nach und nach $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$. ꝛc. gesezt wird, und man suchet alle Divisoren der aus diesen Stellen sich ergebenden Werthe, so ist klar: 1.) daß unter den Divisoren des Werths, der aus der Stelle $x = 1$ kommt, vorhanden seyn werde $1 + a$ 2.) Unter den Divisoren des Werths aus der Stelle $x = 0$, werde vorhanden seyn $0 + a$ oder a. 3.) Unter den Divisoren des Werths aus der Stelle $x = -1$, werde vorhanden seyn $-1 + a$. Nun aber sind $1 + a$, a, $-1 + a$ in arithmetischer Progression, deren Glieder um 1 abnehmen: also kann unter den Divisoren des Werths, der aus der Stelle $x = 0$ kommt, der selbst das lezte Glied der Aequation ist, kein gesuchtes Glied a seyn; es werde denn um eine Einheit von einen Divisor des Werths, der aus der Stelle $x = 1$ kommt, überschritten, und es übersteige um eine Einheit einen Divisor des Werths, der aus der Stelle $x = -1$ kommt. Daher sind nur diejenigen Divisoren des lezten Gliedes, oder des Werths aus der Stelle $x = 0$ für a anzunehmen, um die einfache Gleichung $x + a$ zu formiren, die in einer arithmetischen Progression sind, so um 1 abnimmt.

Zusaz. Wenn aus der angenommenen Stelle $x = 0$ sich mehrere Divisoren ergeben, welche die gegebene Bedingung haben, und man soll bestimmen, welchen derselben man statt a anzunehmen habe, so fahre man mit den Vorausseßungen oder Stellen fort, und seße $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$, $x = -2$. ꝛc. und bemerke, ob durch einen Divisor der Werthe, die aus diesen neuen Stellen kommen, die schon gefundene Progressionen sich fortsetzen. Wenn eine schon vorhin gefundene Progression durch keinen Divisor dieser neuen Stellen fortgesezt wird, so ist sie zu verwerfen,

werfen; wird aber solche fortgesezt, so ist sie beyzubehalten, wie aus folgenden Beyspielen erhellen wird.

§. 158.

Beyspiele.

I.) Man suchet den Divisor der Aequation

$$x^3 - x^2 - 10x + 6 = 0.$$

Man schreibe in die erste Columne die Annahmen oder Stellen $x = 1$, $x = 0$, $x = -1$. In die andere Columne die Werthe der Gleichung, die sich daraus ergeben, -4, 6, 14. In die dritte Columne alle Divisoren dieser Werthe. Folgendergestalt:

$x = 1$	-4	1, 2, 4	4
$x = 0$	6	1, 2, 3, 6	3
$x = -1$	14	1, 2, 7, 14	2

Unter diesen Divisoren kommt eine einzige Progression 4, 3, 2, die man in die 4te Columne schreiben kann, deren erstes Glied 4 der ersten Stelle $x = 1$ correspondiret; das zweyte, 3, correspondiret der 2ten Stelle $x = 0$; das dritte Glied, 2, correspondiret der 3ten Stelle $x = -1$: daher ist für a die Zahl 3 anzunehmen, welche der Stelle $x = 0$ correspondiret, und die Division zu versuchen durch $x + 3$; und da diese angehet, so wird nach derselben die Aequation auf diese des 2ten Grades deprimirt.

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

welche keine rationale Wurzel hat, wie einem, der die Operation wiederholt, leicht erhellen wird.

II.) Man suchet den Divisor der Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - 13x + 6 = 0$$

Man schreibe in die erste Columne eben die Stellen, wie vorhin; in die zweyte die daher entstehende Wer-

the der Gleichung; in die dritte alle ihre Divisoren, folgender Gestalt:

$x=1$	-8	1, 2, 4, 8	-2 4
$x=0$	6	1, 2, 3, 6	-3 3
$x=-1$	16	1, 2, 4, 8, 16	-4 2
$x=-2$	16	1, 2, 4, 8, 16	1

Man wird unter den Divisoren zwey Progressionen antreffen, die um eine Einheit abnehmen, nemlich $-2, -3, -4$, und $4, 3, 2$, welche in die vierte Columne gesezt werden. Man hat also die Division durch die Gleichungen $x-3$ oder $x+3$ zu versuchen; oder, damit sogleich erhelle, welcher Progression ihr mittleres Glied statt a zu nehmen sey, so mache man eine neue Annahme einer neuen Stelle, $x=-2$. Daher kommt nun der Werth der Gleichung $=16$. Da unter dessen Divisoren -5 nicht begriffen ist, so kann die vorige Progression durch seine Divisoren nicht fortgesezt werden; daher ist sie zu verwerfen. Aber die andere $4, 3, 2, 1$, wird fortgesezt; daher nimmt man für a an die Zahl 3, und versuchet, ob sie sich mit $x+3$ dividiren lasse; welches angehet, und wodurch die Gleichung auf $x^2-5x+2=0$ deprimirt wird, welche leztere Gleichung keine rationale Wurzel hat; welches leicht zu zeigen ist, wenn man die vorige Operation wiederholen will.

III.) Man suchet den Divisor der Gleichung:

$$x^5-12x^4+5x^3-61x^2+22x-120=0.$$

Man formire 3 Columnen, wie in den vorigen Aufgaben:

$x=1$	-165	1, 3, 5, 11, 15, 33, 53, 165.	3 -11
$x=0$	-120	1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120.	2 -12
$x=-1$	-221	1, 13, 17, 221.	1 -13

so

so hat man unter den Divisoren zwey um 1. abnehmende Progressionen 3, 2, 1, und —11, —12, —13, die man in die 4te Columne schreibt, und wovon die erste sogleich als verwerflich erscheinet; denn bey einer neuen Stelle $x = -2$, müßte unter den Divisoren des daher entspringenden Werths das Glied 0 erhalten werden, damit man die erste Progression durch dasselbe fortsetzen könnte, welches absurd ist; daher, wenn man nun die 2te Progression beybehält, so ist der Divisor $x - 12$, durch den durch die Division die Gleichung auf $x^4 + 5x^2 - x + 10 = 0$ deprimirt wird, welche keine rationale Wurzel hat.

IV.) Man suchet den Divisor der Gleichung

$$x^3 - 3x^2 - 46x - 72 = 0.$$

Nach bisheriger Verfahrungsart

$x=2$	—168	1,2,3,4,6,7,8,12,14, 21,24,28,42,56, 84,168	— 74 ; 6
$x=1$	—120	1,2,3,4,5,6,8,10,12, 15,20,24,30,40, 60,120	— 8345
$x=0$	— 72	1,2,3,4,6,8,9,12,18, 24,36,72.	— 9234
$x=-1$	— 30	1,2,3,5,6,10,15,30.	—10123

Kommen unter den Divisoren vier arithmetische um 1. abnehmende Progressionen, vor, die man in die 4te Columne schreibt. Man versucht also die Division der Aequation durch die einfache Gleichungen $x - 9$, $x + 2$, $x + 3$, $x + 4$. Oder man sezt auch eine neue Annahme $x = -2$, in welchem Fall der Werth der Gleichung $= 0$ wird, daher ist ihr Divisor $= x + 2$, aber von den übrigen 3 Progressionen kann aus dieser Annahme nichts herausgebracht wer-

werden. Man setze also $x=2$. Durch die dieser Annahme correspondirende Divisoren wird die ohneinslezte Progression nicht fortgesezt, und wird also verworfen, die übrigen aber gehen fort. Daher sind 2 andere Divisoren der gegebenen Gleichung $x-9$ und $x+4$.

V.) Man suchet den Divisor der Gleichung

$$x^6-4x^5+3x^4-12x^3-5x^2+11x+36=0$$

die Tafel wird:

$x=2$	-74	1, 2, 37, 74	— —1 —2 —
$x=1$	30	1, 2, 3, 5, 10, 15	3 —2 —3 10
$x=0$	36	1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36	2 —3 —4 9
$x=-1$	40	1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40	1 —4 —5 8

Bey den Divisoren, die den 3 gewöhnlichen Stellen correspondiren, kommen 4 Progressionen vor, die in der 4ten Columne stehen, deren beyde mittlere auch durch die der neuen Stelle $x=2$ correspondirende Divisoren fortgesezt werden; daher diese allein beyzubehalten sind. Will man nun wissen, welche von beyden anzuwenden sey, so setze man eine neue Stelle $x=3$; damit nun durch die dieser Stelle correspondirende Divisoren die Progression $-1, -2, -3, -4$ fortgesezt werden könne, so müßte unter ihnen das Glied 0 enthalten seyn, welches absurd ist; daher erhellet, daß diese Progression zu verwerfen, die andere aber beyzubehalten ist, und der Divisor wird seyn $x-4$, durch den die Gleichung dividirt auf $x^5+3x^3-5x-9=0$ reducirt wird, so keine rationale Wurzel hat.

§. 159.

Aufgabe.

Gleichungen von zwey Dimensionen zu finden, von dieser Form $x^2 + ax + b = o$, durch welche eine gegebene Gleichung genau dividirt oder auf einen niedrigeren Grad deprimirt werden könne.

Auflösung. Es enthalte die Formul $x^2 + ax + b$ den gesuchten Divisor. Sezt man $x = o$, so wird sein Werth auf b reducirt, so der Divisor des lezten Gliedes seyn wird, oder des Werths der Gleichung, aus der Stelle $x = o$. Gleichergestalt, wenn in diesem Divisor $x = 1$ gesezt wird, so ist $1 + a + b$ der Divisor des Werths der Gleichung aus der Stelle $x = 1$. Endlich wenn in eben dem Divisor $x = -1$ gesezt wird, so ist $+1 - a + b$ der Divisor des Werths der Gleichung aus der Stelle $x = -1$. Suchet man demnach alle Divisoren der aus diesen Stellen kommenden Werthe, und aus ihnen, sowohl positiv als negativ genommen, wird 1 abgeschnitten, so ergeben sich unter diesen um 1 verminderten Divisoren die Glieder $a + b$, b, $-a + b$, welche in einer steigenden oder abnehmenden arithmetischen Progression stehen, je nachdem die Grösse a negativ oder positiv ist. Daher, wenn nach abgeschnittener Einheit aus jenen Divisoren eine arithmetische Progression in ihnen angetroffen wird, so wird das mittlere Glied derselben, so der Stelle $x = o$ correspondiret, $= b$ seyn; dieses von $a + b$, so in eben der Progression der Stelle $x = 1$ correspondirt, abgezogen, gibt a: wenn daher die gefundenen Werthe a und b in der Formul $x^2 + ax + b$ substituirt werden, so hat man den gesuchten Divisor.

Zusaz.

Zusatz. Wenn sich mehrere arithmetische Progressionen ergeben, so ist leicht zu bestimmen, welche von ihnen man zu nehmen hat. Denn wenn man neue Stellen macht: $x = -2$, $x = -3$ &c. so werden $4 - 2a + b$, $9 - 3a + b$ die diesen neuen Stellen correspondirende Divisoren der Werthe der Gleichung. Wenn also von den Divisoren (sowohl positiv als negativ genommen) dieser Werthe, 4 oder 9 &c. abgeschnitten werden, so verbleiben die Glieder $-2a + b$, $-3a + b$, &c. durch welche die vorige Progression $a + b$, b, $\div a + b$ fortgesezt werden wird. Eben so erhellet, daß die nemliche Progression werde fortgesezt werden, wenn man die Stellen sezt $x = 2$, $x = 3$. &c. Daher aus den gefundenen Progressionen nur diese zu nehmen ist, welche durch die diesen neuen Stellen correspondirende Divisoren fortgesezt wird; wie in voriger Aufgabe.

§. 160.

Beyspiele.

Man suchet den Divisor zweyer Dimensionen der Gleichung $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x - 6 = 0$.

Man schreibe die 3 ersten Columnen, wie in voriger Aufgabe; in die 4te Columne sezze man die Quadrate der ersten Columne; die 5te Columne formire man also: 1.) daß die erste Reihe derselben, 0, 1, 3 &c. entstehe, indem man eine Einheit aus den Divisoren wegnimmt, welche sowohl positiv als negativ genommen, der ersten Stelle $x = 1$ correspondiren. 2.) Daß die 2te Reihe derselben 1, 2, 3 &c. formirt werde aus den sowohl positiv als negativ genommenen der 2ten Stelle $x = 0$ correspondirenden Divisoren. 3.) Daß die 3te Reihe derselben 0, 1, 2 &c. formirt

mirt werde, indem man eine Einheit von den sowohl positiv als negativ genommenen der 3ten Stelle $x = -1$ correspondirenden Divisoren abschneidet.

$x=1$	-8	1, 2, 4, 8	1	0, 1, 3, 7, -2, -3, -5, -9	-5, 1, 7, -2
$x=0$	-6	1, 2, 3, 6	0	1. 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6.	-1, 3, 6, -1
$x=-1$	12	1, 2, 3, 4, 6, 12	1	0, 1, 2, 3, 5, 11, -2, -3, -4, -5, -7, -13	1, 5, 5, 0
$x=-2$	88	1, 2, 4, 8, 11, 22, 44, 88.	4	0, 4, 7, 18, 40, 84, -2, -3, -5, -6, -8, -12, -15, -26, -48, -92.	4, 7, 4, —

Nun kommen in den Reihen der 5ten Columne arithmetische Progressionen vor, welche in der 6ten Columne angeschrieben sind, aus denen die leztere als verwerflich erscheinet, wenn man eine neue Stelle $x = -2$ macht. Denn wenn die Divisoren alle des daher entstehenden Werths 88 in die dritte Columne eingeschrieben werden, und das Quadrat 4, der Stelle -2, in die 4te Columne, und man nimmt sodann 4 aus denen sowohl positiv als negativ genommenen Divisoren der 3ten Columne, und formirt daraus die fünfte Columne 0, 4, 7, 18. ꝛc. so wird durch die Glieder derselben jene lezte Progression $-2, -1, 0$, nicht fortgesezt, und ist daher zu verwerfen. Eben so würde erhellen, wenn man mehrere Stellen machte, daß auch die dritte verwerflich sey, 7, 6, 5, 4. Daher, wenn beyde erstere beybehalten werden, so kommt aus der ersten $b = -2$, aus der 2ten $b = 3$, und also aus der ersten $a + b = -5$, aus der 2ten $a + b = 1$; daher b abgezogen, wird $a = -3$ oder $a = -2$. Wenn also in der Formul $x^2 + ax + b$ statt a und b diese Werthe substituirt werden; so werden die gesuchten Divisoren $x^2 - 3x - 2$ und $x^2 - 2x + 3$, wenn durch einen davon die gegebene Gleichung dividirt wird, so kommt der andere als Quotient. Wenn also die Wurzeln dieser Divisoren, aus denen eine gegebene Gleichung zusammengesezt

ist,

ist, gefunden werden, so hat man die Wurzeln der gegebenen Gleichung. (§. 98. Zus. 4.)

II.) Man suchet den Divisor 2er Dimensionen der Aequation $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 10x + 5 = 0$. Man mache wie vorhin 3 Stellen, und 5 Columnen:

x=1	33	1, 3, 11, 33	1	0, 2, 10, 32, −2, −4, −12, −34	10, 2
x=0	5	1, 5	0	1, 5, −1, −5.	5, 1
x=−1	1	1	1	0, −2.	0, 0

In den Reihen der 5ten Columne ergeben sich zwey arithmetische Progressionen, die in der 6ten Columne angeschrieben sind: und da die gegebene Gleichung vom 4ten Grad ist, so hat sie, wenn sie einen Divisor von 2 Dimensionen hat, auch einen andern dieser Art. (§. 98. Zus. 3.) Daher kann man beyde Progressionen gebrauchen. Es ist also aus der ersten $b = 5$, und also $a + b = 10$, also $a = 10 - 5 = 5$; Aus der 2ten $b = 1$, also $a + b = 2$, also $a = 1$. Diese Werthe in der Formul $x^2 + ax + b$ substituirt, geben die gesuchte Divisoren, $x^2 + 5x + 5$, und $x^2 + x + 1$. Dividirt man durch einen von diesen die gegebene Gleichung, so ist der andere der Quotient; und wenn man die Wurzeln dieser Divisoren findet, so hat man die Wurzeln der gegebenen Gleichung. (§. 98. Zus. 4.)

III.) Man suchet den Divisor 2er Dimensionen der Gleichung $x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 36x + 21 = 0$. Man formire die Tafel:

x=1	−1	1	1	0, −2	−2, −2, 0, 0, 0
x=0	21	1, 3, 7, 21	0	1, 3, 7, 21, −1, −3, −7, −21	−1, 1, −7, −3, −1
x=−1	65	1, 5, 13, 65	1	0, 4, 12, 64, −2, −6, −14, −66	0, 4, −14, −6, −2
x=−2	125	1, 15, 25, 125	4	1, 21, 121, −3, −5, −9, −29, −125	1, — — 9, −3
x=−3	147	1, 3, 7, 21, 49, 147	9	12, 40, 138, −2, −6, −8, −10, −12, −16, −30, −58, −156.	— — — 12. —

In den 3 ersten Reihen der 5ten Columne kommen 5 arithmetische Progressionen vor, die in der 6ten Columne stehen, woraus bey Annehmung einer neuen Stelle $x = -2$ erhellet, daß durch die 5te Columne dieser Stelle nur 3 Progressionen fortgesezt werden, nemlich die 1ste, 4te, und 5te, welche daher allein beyzubehalten sind. Damit man aber erfahre, welche von ihnen zu nehmen sey, so mache man abermal eine neue Stelle $x = -3$, so wird der Werth der Gleichung 147 in die 2te Columne geschrieben, dessen Divisoren alle in die 3te; aus denen, sowohl positiv als negativ genommen, 9 abgezogen, oder das Quadrat der Stelle -3, in die 4te Columne geschrieben, werde die 5te Columne formirt, durch deren Glieder allein die 4te Progression, nemlich 0, -3, -6, -9, -12 fortgesezt wird: daher ist das Glied derselben, so der Stelle $x = 0$ correspondiret, -3, $= b$, und das vorhergehende $0 = a + b$, daher $a = -b = 3$. Diese Werthe also in der Formul $x^2 + ax + b$ substituirt, geben den gesuchten Divisor $x^2 + 3x - 3$, und den Quotienten $x^3 + 5x - 7 = 0$, der keinen Divisor von 2 Dimensionen hat.

Anmerkung. So lange die gegebene Gleichung den 5ten Grad nicht übersteiget, so können durch

durch diese 2 Gleichungen jedesmal ihre rationale Divisoren gefunden werden, wenn sie dergleichen hat: denn wenn diese Art von Gleichung keinen Divisor von einer oder 2 Dimensionen hat, so hat sie auch keinen von 3, oder

4. Wenn aber die Gleichung auf höhere Grade steiget, so kann es geschehen, daß obschon sie keine Divisoren von einer oder 2 Dimensionen hat, sie dennoch deren von höheren Dimensionen hat, deren Entdeckung zwar auf eben den Gründen beruhet, aber um Weitläuftigkeit der Rechnung willen hier übergangen wird.

Das zweyte Kapitel.

Von Auflösungen der Gleichungen zweyten Grades.

§. 161.

Aufgabe.

Gleichungen zweyten Grades aufzulösen, darinnen das zweyte Glied fehlet.

Auflösung. Jede Gleichung dieser Art wird vorgestellt durch $x^2 + q = 0$. Also ist $x^2 = -q$ und $x = \pm\sqrt{-q}$. Es ist also klar, daß man immer zwey Wurzeln erhalte, eine positive und eine negative, indem jede derselben das Quadrat x^2 hervorbringt; und zwar sind beyde real, wenn der Werth q in der

gegebenen Gleichung negativ ist; beyde aber imaginär, wenn er positiv ist.

§. 162.

Aufgabe.

Gleichungen zweyten Grades aufzulösen, darinnen das dritte Glied fehlet.

Auflösung. Jede dergleichen Gleichung wird auf diese Form gebracht: $x^2 + px = o$, davon Eine Wurzel $x = o$ ist; (§. 102. Zus. 8.) wodurch vermittelst der Division die Gleichung auf Eine Dimension gebracht wird: $x + p = o$, davon die Wurzel ist $x = -p$.

§. 163.

Aufgabe.

Eine Gleichung zweyten Grades, darinnen kein Glied fehlet, durch Versetzung des letzten Gliedes und Ergänzung des unvollkommenen Quadrats aufzulösen.

Aufl. Alle Gleichungen dieser Art können zu dieser Formul reducirt werden,

$$x^2 + px + q = o$$

und werden gewöhnlich aufgelößt, durch Versetzung des lezten Gliedes; dadurch man

$$x^2 + px = -q$$

erhält; und sodann durch Ergänzung des unvollkommenen Quadrats, indem man auf beyden Seiten der Gleichung das Quadrat des halben Coefficienten des mitt-

mittleren Gliedes addiret: $\frac{1}{4}p^2$. Dadurch erhält man

$$x^2 + px + \tfrac{1}{4}p^2 = \tfrac{1}{4}p^2 - q.$$

Endlich durch Extraction der Wurzel auf beyden Seiten

$$x + \tfrac{1}{2}p = \pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}p^2 - q)}.$$

Daher wird $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$. Wobey sich abermal ergibt, daß wegen der doppelten Möglichkeit der Zeichen + und — eine doppelte Wurzel, oder Werth des unbekannten x erhalten werde.

§. 164.

Zusatz 1. Wenn in der gegebenen Gleichung das lezte Glied q negativ ist, so ist im Ausdruck der Wurzel der Werth —q positiv, und daher ist die Grösse $\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$ allemal würklich, (quantitas realis), und grösser als $\frac{1}{2}p$. Und deswegen ist, (der Coefficient des zweyten Gliedes p mag positiv oder negativ seyn,) allemal Eine Wurzel $+\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} - \frac{1}{2}p$ positiv, und die andere $-\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} - \frac{1}{2}p$ negativ. So oft also das lezte Glied der Gleichung q negativ ist, so hat man allemal 2 würkliche Wurzeln, die eine positiv und die andere negativ.

Z. B. Wenn man die Gleichung $x^2 - 6x - 16 = 0$ mit der General Formul vergleicht, so ist $p = -6$ und $q = -16$, und also $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} = 3 \pm \sqrt{(9 + 16)} = 3 \pm 5 = 8$ oder $= -2$.

Zusatz 2. Wenn $q = 0$ ist, so ist $-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} = -\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2}$ oder $-\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2}$; das ist, $-\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p = 0$, oder $-\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}p = -p$; oder eine von den Wurzeln ist $= 0$, die andere $= -p$. (Gänzlich wie oben, §. 162.).

Zusatz 3. Wenn das lezte Glied q zwar positiv, aber kleiner ist, als $\frac{1}{4}p^2$, so wird annoch die Grösse $\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$ real seyn, aber kleiner, als $\frac{1}{2}p$, also werden beyde Wurzeln real seyn; und zwar beyde positiv, wenn der Coefficient des 2ten Gliedes p negativ ist; und beyde negativ, wenn eben derselbe Coefficient positiv ist.

Z. B. Wenn die Gleichung $x^2 - 6x + 5 = 0$ mit der General-Formul verglichen wird, so ist $p = -6$, $q = 5$, und daher $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} = 3 \pm \sqrt{4} = 3 \pm 2 = 5$ oder 1. Aber in der Aequation $x^2 + 6x + 5 = 0$, wäre $x = -3 \pm \sqrt{4} = -1$ oder $= -5$.

Zusatz 4. Wenn das lezte Glied q positiv ist, und $= \frac{1}{4}p^2$, so ist $\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} = 0$; daher werden beyde Wurzeln $= -\frac{1}{2}p$, oder einander gleich.

Z. B. Wenn die Gleichung $x^2 - 6x + 9 = 0$ mit der General-Formul verglichen wird, so ist $p = -6$, $q = 9$; und daher $x = -\frac{1}{2}p \pm \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} = 3 \pm \sqrt{(9 - 9)} = 3$; daher ist jede von beyden Wurzeln $= 3$.

Zusatz 5. Wenn das lezte Glied q positiv ist, und grösser als $\frac{1}{4}p^2$, so wird die Grösse $\frac{1}{4}p^2 - q$ negativ; also $\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$ wird eine eingebildete Grösse, (Quantitas Imaginaria); daher werden auch beyde Wurzeln imaginär, und demnach die Aufgabe, daher die Aequation entstanden ist, unmöglich.

Z. B. Wenn die Gleichung $x^2 - 6x + 10 = 0$ mit der General-Formul verglichen wird, so ist $p = -6$, $q = 10$, und also $x = -\frac{1}{2}p \pm \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)} = 3 \pm \sqrt{(9 - 10)} = 3 \pm \sqrt{-1}$.

§. 165.

*) Allerley Fälle quadratischer Gleichungen zur Uebung, bey denen obige Auflösungsart der Ergänzung des unvollkommenen Quadrats angewendet wird.

*) $x^2 + x\sqrt{a} = b$

es sey $\sqrt{a} = m$, so ist

$x^2 + mx = b$

$x^2 + mx + \frac{m^2}{4} = b + \frac{m^2}{4}$

$x + \frac{m}{2} = \pm\sqrt{(b + \frac{m^2}{4})}$

$x = \pm\sqrt{(b + \frac{m^2}{4})} - \frac{m}{2}$

für m wieder substituirt

$x = \pm\sqrt{(b + \frac{a}{4})} - \sqrt{\frac{a}{2}}$

*) $b^2 = 2y^2 - 2y\sqrt{\frac{1}{2}y^2}$

$2y\sqrt{\frac{1}{2}y^2} = 2y^2 - b^2$

$2y^4 = 4y^4 - 4y^2b^2 + b^4$

$-b^4 = 4y^4 - 2y^4 - 4y^2b^2$

$-b^4 = 2y^4 - 4y^2b^2$

$-\frac{b^4}{2} = y^4 - 2y^2b^2$

$b^4 - \frac{b^4}{2} = y^4 - 2y^2b^2 + b^4$

$\frac{b^4}{2} = y^4 - 2y^2b^2 + b^4$

$$\pm\sqrt{\frac{b^4}{2}} = y^2 - b^2$$

$$\pm\sqrt{(\frac{b^4}{2})} + b^2 = y^2$$

$$\pm\sqrt{\sqrt{[(\frac{b^4}{2}) + b^2]}} = y.$$

*) $(a + x)^2 = b(a + x) + c$

es sey $a + x = v$, so ist

$$v^2 = bv + c$$

$$v^2 - bv + \frac{b^2}{4} = c + \frac{b^2}{4}$$

$$v - \frac{b}{2} = \pm\sqrt{(c + \frac{b^2}{4})}$$

$$v = \pm\sqrt{(c + \frac{b^2}{4})} + \frac{b}{2}$$

vor v substituirt

$$a + x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{(c + \frac{b^2}{4})}$$

$$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{(c + \frac{b^2}{4})} - a$$

*) 1.) $c = (a \overset{+}{-} x)\frac{y}{2}$

2.) $x = a + d(y - 1)$

$$x = a + dy - d$$

3.)

$$3.)\ c=(a+a+dy-d)\frac{y}{2}$$

$$c=(2a+dy-d)\frac{y}{2}$$

$$c=\frac{2ay+dy^2-dy}{2}$$

$$2c=2ay+dy^2-dy$$

$$\frac{2c}{d}=y^2+\frac{2ay-dy}{d}$$

$$\frac{2c}{d}=y^2+(\frac{2a-d}{d})y$$

$$\frac{2c}{d}+\frac{4a^2-4ad+d^2}{4d^2}=y^2+(\frac{2a-d}{d})y+$$

$$+\frac{4a^2-4ad+d^2}{4d^2}$$

$$\pm\sqrt{(\frac{2c}{d}+\frac{4a^2-4ad+d^2}{4d^2})}=y+\frac{2a-d}{2d}$$

$$\pm\sqrt{(\frac{2c}{d}+\frac{4a^2-4ad+d^2}{4d^2})}-\frac{2a-d}{2d}=y.$$

Da nun oben $x=a+dy-d$, so ist

$$x=a+d[\sqrt{(\frac{2c}{d}+\frac{4a^2-4ad+d^2}{4d^2})}-$$

$$-\frac{2a-d}{2d}]-d.$$

Es erhellet, welche Weitläuftigkeit man sich öfters mache, wenn man sich der Substitution nicht bedient.

*) (a—

*) $(a-2x)^2=c-ab-2bx$
$(a-2x)^2=c-(a-2x)b$

Es ſey $a-2x=v$, ſo iſt
$v^2=c-bv$

$$v^2+bv+\frac{b^2}{4}=c+\frac{b^2}{4}$$

$$v+\frac{b}{2}=\pm\sqrt{(c+\frac{b^2}{4})}$$

$$v=\pm\sqrt{(c+\frac{b^2}{4})}-\frac{b}{2}$$

vor v wieder ſubſtituirt

$$a-2x=\pm\sqrt{(c+\frac{b^2}{4})}-\frac{b}{2}$$

$$a=2x\pm\sqrt{(c+\frac{b^2}{4})}-\frac{b}{2}$$

$$a\mp\sqrt{(c+\frac{b^2}{4})}+\frac{b}{2}=2x$$

$$\frac{a}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(c+\frac{b^2}{4})}+\frac{b}{2}=x.$$

*) $a\sqrt{(b-3x)}=c-db+3dx$
$a\sqrt{(b-3x)}=c-(b+3x)d$

es ſey $\sqrt{(b+3x)}=v$
$b+3x=v^2$

$av=c-dv^2$
$av+dv^2=c$

$$v^2+\frac{av}{d}+\frac{a^2}{4d^2}=\frac{c}{d}+\frac{a^2}{4d^2}$$

$$v+\frac{a}{2d}=\sqrt{(\frac{c}{d}+\frac{a^2}{4d^2})}$$

v=

$$v=\sqrt{(\frac{c}{d}+\frac{a^2}{4d^2})}-\frac{a}{2d}$$

$$v^2=\frac{c}{d}+\frac{a^2}{4d^2}-\frac{a}{d}\sqrt{(\frac{c}{d}+\frac{a^2}{4d^2})}+\frac{a^2}{4d^2}$$

vor v^2 substituirt

$$b-3x=\frac{c}{d}+\frac{a^2}{4d^2}-\frac{a}{d}\sqrt{(\frac{c}{d}+\frac{a^2}{4d^2})}+\frac{a^2}{4d^2}$$

$$3x-b=\frac{a}{d}\sqrt{(\frac{c}{d}+\frac{a^2}{4d^2})}-\frac{c}{d}-\frac{a^2}{2d^2}$$

$$x=\frac{b}{3}+\frac{a}{3d}\sqrt{(\frac{c}{d}+\frac{a^2}{4d^2})}-\frac{c}{3d}-\frac{a^2}{6d^2}$$

*) $$\frac{bx+ab}{a+b}+\sqrt{(a+x)}=c$$

$$\frac{(x+a)b}{a+b}+\sqrt{(a+x)}=c$$

es sey $\sqrt{(a+x)}=v$

$$a+x=v^2$$

ferner sey $a+b=m$, so ist

$$\frac{bv^2}{m}+v=c$$

$$bv^2+mv=mc$$

$$v^2+\frac{mv}{b}+\frac{m^2}{4b^2}=\frac{mc}{b}+\frac{m^2}{4b^2}$$

$$v+\frac{m}{2b}=\pm\sqrt{(\frac{mc}{b}+\frac{m^2}{4b^2})}$$

$$v=\pm\sqrt{(\frac{mc}{b}+\frac{m^2}{4b^2})}-\frac{m}{2b}$$

vor

vor v substituirt, so ist

$$\sqrt{(a+x)} = \pm\sqrt{\left(\frac{mc}{b}+\frac{m^2}{4b^2}\right)} - \frac{m}{2b}$$

$$a+x = \frac{mc}{b}+\frac{m^2}{4b^2} - \frac{m}{b}\sqrt{\left(\frac{mc}{b}+\frac{m^2}{4b^2}\right)} + \frac{m^2}{4b^2}$$

$$x = \frac{mc}{b}+\frac{m^2}{2b^2} - \frac{m}{b}\sqrt{\left(\frac{mc}{b}+\frac{m^2}{4b^2}\right)} - a$$

vor m auch substituirt, gibt endlich

$$x = \frac{(a+b)c}{b}+\frac{a^2+2ab+b^2}{2b^2} - \frac{a+b}{m}$$
$$\sqrt{\left(\frac{(a+b)c}{b}+\frac{a^2+2ab+b^2}{4b^2}\right)} - a.$$

§. 166.

Aufgabe.

Gleichungen zweyten Grades aufzulösen, dadurch, daß man das zweyte Glied derselben wegschafft.

Auflösung. Jede Gleichung zweyten Grades, welche alle Glieder hat, kann zu der Form gebracht werden:

$$x^2 + px + q = 0;$$

um das zweyte Glied wegzuheben, werde $y - \frac{1}{2}p = x$. (§. 114. Zus. 1.) und statt x dieser Werth substituirt, so wird $y^2 - \frac{1}{4}p^2 + q = 0$; wo nun also das 2te Glied fehlt, und $y = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$. Setzet man diesem $-\frac{1}{2}p$ zu, so hat man $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$ (Gänzl. wie oben §. 163.)

*) Man

*) Man kan nemlich durch eine geschickte Benennung, wie aus allen höheren Gleichungen, also auch aus einer unreinen quadratischen Gleichung das zweyte Glied gänzlich wegschaffen, und dadurch solche unreine quadratische Gleichung in eine Reine verwandlen. Man setze nemlich statt x eine andere unbekannte Grösse y, welche noch mit einer Grösse verbunden ist, die herauskommt, wenn man die bekannte Grösse des 2ten Gliedes mit dem Exponenten des ersten Gliedes (also bey der quadratischen Gleichung mit 2) dividiret, und dieses wird mit y durch + verbunden, wenn das 2te Glied vorher — hatte, und durch — wenn jenes vorher + hatte. Z. B. Man hätte die Gleichung:

$x^2 + ax = m$

so substituire man $x = y - \frac{a}{2}$

oder man hätte $x^2 - 5x = m$

so substituire man $x = y + \frac{5}{2}$

Es sey würklich aufzulösen

$x^2 - 6x = 16$

hier ist $x = y + 3$

demnach ist

$x^2 = y^2 + 6y + 9$

$-6x = \quad -6y - 18$ hier hebt sich $+6y$ gegen $-6y$ und man erhält statt $x^2 - 6x$ nun

$y^2 - 9 = 16$

$y^2 = 16 + 9 = 25$

$y = \sqrt{25} = 5$

also $x = y + 3 = 5 + 3 = 8$.

*) $8x - x^2 = 7$

$x^2 - 8x = -7$

hier

hier ist durch Substitution $x = y + 4$, folgl.

$$x^2 = y^2 + 8y + 16$$
$$-8x = \quad -8y - 32$$
$$y^2 - 16 = -7$$
$$y^2 = 16 - 7 = 9$$
$$y = \sqrt{9} = 3$$

folgl. $x = 4 + 3 = 7$.

*) $x^2 + x = 56$

hier ist $x = y - \frac{1}{2}$

also $x^2 = y^2 - y + \frac{1}{4}$
$+ x = \quad y - \frac{1}{2}$

$$y^2 - \tfrac{1}{4} = 56$$
$$y^2 = 56 + \tfrac{1}{4} = \tfrac{225}{4}$$
$$y = \sqrt{\tfrac{225}{4}} = \tfrac{15}{2} = 7\tfrac{1}{2}$$

folgl. $x = 7\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 7$.

*) $x^2 + 3x = 28$

$x = y - \frac{3}{2}$

also $x^2 = y^2 - 3y + \frac{9}{4}$
$+ 3x = \quad + 3y - \frac{9}{2}$

$$y^2 - \tfrac{9}{4} = 28$$
$$y^2 = 28 + \tfrac{9}{4} = \tfrac{121}{4}$$
$$y = \sqrt{\tfrac{121}{4}} = \tfrac{11}{2}$$

folgl. $x = \frac{11}{2} - \frac{3}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

§. 167.

Es ist schon oben vieles von den Vortheilen einer geschickten Benennung gesagt worden; so kann man demnach auch

Eine unreine quadratische Gleichung durch geschickte Benennung vermeiden, wenn man das unrei-

ne

ne Quadrat mit der Differenz der Quadrate vergleicht, und es in solcher zu verwandlen sucht.

Es sey 1.) der Fall, wo das zweyte Glied das Zeichen + hat.

$$x^2 + ax$$

Man setze $x^2 + ax = z^2 - m^2$, so ist

$$(x + a)x = (z + m)(z - m)$$

Es sey nun $x = z - m$, so ist

$$x + a = z + m$$

und für x substituirt

$$z - m + a = z + m$$

$$a = 2m$$

$$\frac{a}{2} = m$$

mithin ist $x = z - \frac{a}{2}$

Und es folgt die Regul: Man benenne das Unbekannte dergestalt, daß man die halbe bekannte Grösse subtrahirt.

2.) Es sey der Fall, wo das zweyte Glied das Zeichen — hat.

$$x^2 - ax$$

Man setze abermal $x^2 - ax = z^2 - m^2$, so ist

$$x(x - a) = (z + m)(z - m) \text{ folglich}$$

$$x = z + m \text{ und}$$

$$x - a = z - m, \text{ und substituirt:}$$

$$z - m + a = z + m$$

$$-m + a = m$$

$$a = 2m$$

$$m = \frac{a}{2}$$

Mithin $x = z + m = z + \frac{a}{2}$ und man erhält die

Regul: Man benenne das Unbekannte dergestalt, daß man zum Unbekannten die halbe bekannte Grösse addiret.

Um sogleich die Anwendung von solcher Benennungsart zu bemerken, seyen folgende Aufgaben:

*) Wenn man zu Titii Geld 5 addirt, und die Summe mit eben diesem Geld multiplicirt, so kommt 84. Es fragt sich, was Titius gehabt habe?

Es sey Titii Geld $= 5$, so ist

$(5 + x)x = 84$

$x^2 + 5x = 84$

Da man nun solchergestalt auf eine unreine quadratische Gleichung kommt, so benenne man anderst, und weil das 2te Glied + hat, so wird

Titii Geld $= x - \frac{5}{2}$, und statt $x^2 + 5x = 84$ kommt nun:

$(x - \frac{5}{2} + 5)(x - \frac{5}{2}) = 84$

$(x + \frac{5}{2})(x - \frac{5}{2}) = 84$

$x^2 - \frac{25}{4} = 84$

$x^2 = 84 + \frac{25}{4} = \frac{361}{4}$

$x = \frac{19}{2}$

Da nun Titii Geld $= x - \frac{5}{2}$ angenommen worden, so kommt

$\frac{19}{2} - \frac{5}{2} = 7$. Dann $(7 + 5)7 = 84$.

*) Wenn man von Titii Geld 2 subtrahirt, und die Differenz mit eben diesem Geld multiplicirt, so kommt 15.

Titii Geld $= x$. Also $(x - 2)x = 15$

$x^2 - 2x = 15$

Da

Da nun das zweyte Glied — hat, so nennt man Titii Geld $= x + 1$. und es kommt

$$(x + 1 - 2)(x + 1) = 15$$
$$x^2 - 1 = 15$$
$$x^2 = 16$$
$$x = 4 \text{ folglich Titii Geld} = 4 + 1 = 5.$$

*) §. 168.

Auflösung der unreinen quadratischen Gleichung durch Zerfällung in Faktoren, wenn x eine ganze Zahl ist.

Die Auflösung ist schon particular; auch ist es öfters nicht ganz leicht, die Faktoren zu finden; wenn sich aber diese Auflösungsart anbringen lässet, so ist sie sehr vortheilhaft und geschwind.

Z. B. Es sey die Gleichung

$$x^2 + 2x = 35$$
$$(x + 2)x = 7 \cdot 5.$$
$$x = 5.$$

Denn x ist der kleinere, und $x + 2$ der grössere Faktor, wie 5 der kleinere und 7 der grössere ist.

*) $x^2 - 2x = 35$
$(x - 2)x = 5 \cdot 7.$
$x = 7.$

Denn hier ist x der grössere Faktor, und $x - 2$ der kleinere.

*) $x^2 + 6x = 91$
$(x + 6)x = 13 \cdot 7$
$x = 7.$

*) $13x - x^2 = 22$
$(13 - x)x = 2 \cdot 11$
$x = 11$

*) $x^2 + 11x = 26$
$(x+11)x = 13.2$
$x = 2.$

*) $x^2 - 12x = 13$
$(x-12) = 1.13$
$x = 13.$

Wenn die Zahlen grösser wären, als daß sie sich so leicht in einfache Faktoren zerfällen lassen, so sezze man $x = 2y$, wenn anders die Zahl gerade ist, d. i. sich mit 2 dividiren läßt.

Z. B. $x^2 - 3x = 154$
$(2y - 3)2y = 154$
dividirt mit 2
$(2y - 3)y = 77$
$(2y - 3)y = 11.7.$
$y = 7$ also
$x = 7.2 = 14.$

*) $(x - 7)x = 182$
$(2y - 7)2y = 182$
$(2y - 7)y = 91$
$(2y - 7)y = 13.7$
$y = 7$ also
$x = 2y = 14.$

*) $(23 - x)x = 132$
$(23 - 2y)2y = 132$
$(23 - 2y)y = 66$
$(23 - 2y)y = 11.6$
$y = 6$
$x = 12.$

Läßt sich die Zahl mit 4 dividiren, so sezt man $x = 4y$, und dividiret sodann mit 4; läßt sie sich mit 8 dividiren, so sezt man $x = 8y$ und dividirt sodann mit 8.

Z. B.

z. B. $x^2 + 43x = 188$

$(4y + 43)\,4y = 188$

$(4y + 43)\,4y = 47.4$

$(4y + 43)\,y = 47$

$(4y + 43)\,y = 47.1$

$y = 1$

$x = 4y = 4.$

*) $x^2 - 9x = 112$

$(8y - 9)\,8y = 112$

$(8y - 9)\,y = 14$

$(8y - 9)\,y = 7.2$

$y = 2$

$x = 8y = 16.$

*) $(x + 19)\,x = 252$

$(4y - 19)\,4y = 252$

$(4y - 19)\,y = 63$

$(4y - 19)\,y = 9.7$

$y = 7$

$x = 28.$

*) $(x + 9)\,x = 136$

$(8y + 9)\,8y = 136$

$(8y + 9)\,y = 17$

$(8y + 9)\,y = 17.1.$

$y = 1$

$x = 8.$

Wenn die Zahl ungerad ist, so sezt man $x = 2y + 1$.

z. B. $(x + 4)\,x = 221$

$(2y + 5)\,(2y + 1) = 221$

$4y^2 + 12y + 5 = 221$

$4y^2 + 12y = 221 - 5 = 216$

nun alles mit 4 dividirt

$y^2 + 3y = 54$

$(y + 3)\,y = 9.6.$

$y = 6$ also

$x = (2.6) + 1 = 13.$

*) $(x+8)x = 1064$ (773)
$(2y+9)(2y+1) = 1064$
$4y^2 + 20y = 1064$
$y^2 + 5y = 266$
es sey $y = 2z$, so ist
$4z^2 + 10z = 266$
$2z^2 + 5z = 133$ oder
$(2z+5)z = 133$
es sey $z = 2t+1$, so ist
$(4t+2+5)(2t+1) = 133$
$8t^2 + 18t + 7 = 133$
$8t^2 + 18t = 126$
$4t^2 + 9t = 63$
$(4t+9)t = 21 \cdot 3$
$t = 3$ folgl. $z = 7$
$x = 29$.

Man kann auch zum voraus merken, daß x jedesmal $= 1$ werde, wenn die Summe oder Differenz der bekannten Zahlen auf der vorderen Seite der bekannten Zahl auf der anderen Seite gleich ist.

Z. B. in $(5x+4)x = 9$ ist $x = 1$, weil $5+4=9$
in $(x+11)x = 12$ ist $x = 1$
in $(7x-1)x = 6$ ist $x = 1$.

*) Anmerkung.

Man kann die eben angezeigte Vortheile noch sehr weit ausdehnen; allein man muß schon geübt seyn, und insonderheit wissen, aus welchen Faktoren ein Produkt entstehe. Wenn sich die Gleichung nicht schicken will, so kann ein Geübter ihr solche Zusätze geben, daß nothwendig dabey die Vortheile anschlagen müssen.

Z. B.

Z. B. Es sey die Gleichung

$x^2 = 3x + 10$ hier addire man $2x$

$x^2 + 2x = 5x + 10$

$(x + 2)x = (x + 2)5$

$x = 5.$

oder auch:

$x^2 = 3x + 10$ hier subtrahire man 4

$x^2 - 4 = 3x + 10 - 4$

$x^2 - 4 = 3x + 6$

$(x + 2)(x - 2) = (x + 2)3$

$x - 2 = 3$

$x = 5.$

*) $x^2 = 6x - 8$

$x^2 - 4 = 6x - 8 - 4 = 6x - 12$

$(x + 2)(x - 2) = (x - 2)6$

$x + 2 = 6$

$x = 6 - 2 = 4.$

*) §. 169.

Auflösung der unreinen quadratischen Gleichung durch die algebraische Division, wenn sich solche vornehmen lässet:

Man soll in $5x + 5 = x^2 + 3x + 2$ das x finden.

$5x + 5 = x^2 + 3x + 2$

$(x + 1)5 = x^2 + 3x + 2$

$$5 = \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$$

Nun dividire man aber wirklich:

$x + 1$ in $x^2 + 3x + 2$ | $x + 2$

$x^2 + x$

$+ 2x + 2$

$+ 2x + 2$

: :

folgl. $5 = x + 2$

und $x = 5 - 2 = 3$.

*) $2x - 8 = x^2 - 12x + 32$

$(x - 4)\,2 = x^2 - 12x + 32$

$$2 = \frac{x^2 - 12x + 32}{x - 4}$$

und wirklich dividirt:

$x - 4$ in $x^2 - 12x + 32 \mid x - 8$

$x^2 - 4x$

$-8x + 32$

$-8x + 32$

folgl.

$2 = x - 1$ also

$x = 2 + 8 = 10$.

Oft sind aber auch die Faktoren versteckter, und oft muß die Gleichung erst zuvor dazu eingerichtet werden, um diese Vortheile anwenden zu können.

§. 170.

Aufgabe.

Gleichungen höherer Grade aufzulösen, welche auf Gleichungen vom zweyten Grad reducirt werden können.

Aufl. Alle Aequationen von 3 Gliedern, und von dieser Form: $x^{2m} + px^m + q = 0$, wo nemlich im 3ten Glied kein Unbekanntes ist, und dieses Unbekannte im ersten Glied einen doppelt so grossen Exponenten führet, als im 2ten Glied, können auf Gleichungen vom 2ten Grade reducirt werden. Denn man setze $x^m = y$, so wird aus voriger Gleichung fol-

folgende: $y^2 + py + q = o$. Wo $y = -\frac{1}{2}p \underset{m}{\pm}$ $\underset{m}{\pm} \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}$; wie oben. Also $x = \sqrt{y} = \sqrt{[-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}p^2 - q)}]}$.

Z. B. In der Aequation $x^4 - 6x^2 + 1 = o$ ist $p = -6$, $q = 1$, und daher $x = \pm\sqrt{[3 \pm \pm\sqrt{(9-1)}]} = \pm\sqrt{(3 \pm \sqrt{8})}$.

§. 171.

Aufgaben über die unreine quadratische Gleichungen.

*) Aus dem gegebenen Produkt zweyer Grössen $= 40$, und ihrer Differenz $= 3$, die Grössen selbst zu finden.

$xy = a$ $\quad$ $x - y = b$ $\quad$ $x =$ grössere Zahl.
$x = \frac{a}{y}$ $\quad$ $x = b + y$ $\quad$ $y =$ kleinere.
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $a = 40$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $b = 3$

$$b + y = \frac{a}{y}$$
$$by + y^2 = a$$
$$y^2 + by = a$$
$$y^2 + by + \frac{b^2}{4} = a + \frac{b^2}{4}$$
$$y + \frac{b}{2} = \sqrt{(a + \frac{b^2}{4})}$$
$$y = \sqrt{(a + \frac{b^2}{4})} - \frac{b}{2}$$

Berechnung.

	+ 1	+
	$\sqrt{}$	40
	3	
	3	
4	9	4
	+160	160
	169	

$$\frac{\sqrt{169}}{\sqrt{4}} = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}$$
$$-1\frac{1}{2}$$
$$5 = y$$

*) Ein Stück Feld, in Gestalt eines Rectanguls, ist 20 Ruthen länger, als breit, und seine Quadratfläche ist 4000 Quadratruthen, was ist seine Länge und Breite?

$x + a = y$ $\quad xy = b$ $\quad x =$ Breite.

$x = y - a$ $\quad x = \frac{b}{y}$ $\quad y =$ Länge.

$a = 20$

$b = 4000$

$$y - a = \frac{b}{y}$$
$$y^2 - ay = b$$
$$y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}$$
$$y - \frac{a}{2} = \sqrt{(b + \frac{a^2}{4})}$$
$$y = \sqrt{(b + \frac{a^2}{4})} + \frac{a}{2}$$

4000

+	+
4000	$\frac{1}{4}$
	20
	20

✱ | ✱	✱ | ✱00

4000	100

also $\sqrt{(4000 + 100)}$

oder $\sqrt{(4000 + 100)} = 64$

demnach $64 + 10 = 74 = y$

und $74 - 20 = 54$

Diese Zahlen sind freylich nicht genau, denn sie geben zum Innhalt nur 3996, indem es beym Extrahiren nicht ganz aufgegangen: man müßte also durch Decimalstellen die Extraktion fortsetzen.

*) Titius sagt, als er gebohren worden, sey sein Vater 40 Jahre alt gewesen; wenn man aber sein gegenwärtiges Alter mit dem gegenwärtigen Alter seines Vaters multiplicire, so kommen 969 Jahre heraus.

x = Alter des Titius; so ist

$x + a$ = Alter seines Vaters.

$a = 40$

$b = 969$

$(x + a)x = b$

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}$$

$$x + \frac{a}{2} = \sqrt{(b + \frac{a^2}{4})}$$

$$x = \sqrt{(b + \frac{a^2}{4})} - \frac{a}{2}$$

$= \sqrt{(969$

$$= \sqrt{(969 - \frac{40^2}{4})} - \frac{40}{2} = \sqrt{(969 + 400)} - 20$$
$$= 37 - 20 = 17.$$

Andere Auflösung, durch Wegschaffung des zweyten Gliedes

$$x^2 + 40x = 969$$
$$x^2 + 40x - 969 = 0$$

es sey $x = y - 20$

so ist $x^2 = y^2 + 40y + 400$

und $+ 40x = + 40y - 800$

$$y^2 - 400$$

hiezu noch $- 969$

$$y^2 - 1369$$
$$y = \sqrt{1369} = 37$$

demnach $x = 37 - 20 = 17.$

*) Wenn man die Hälfte einer Zahl mit ihrem Drittel multiplicirt, und zum Produkt abermal die Hälfte der vorigen Zahl addiret, so soll 30 kommen.

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{x^2}{6}$$
$$\frac{x^2}{6} + \frac{x}{2} = 30$$
$$x^2 + 3x = 1800$$
$$x^2 + 3x + \frac{3^2}{4} = 180 + \frac{9}{4}$$
$$x + \frac{3}{2} = \sqrt{(180 + \frac{9}{4})}$$
$$x = \sqrt{(180 + \frac{9}{4})} - \frac{3}{2} = \sqrt{(\frac{729}{4})} - \frac{3}{2}$$
$$= \frac{27}{2} - \frac{3}{2} = \frac{24}{2} = 12.$$

*) Es kauft jemand ein Pferdt, und verkauft es wieder für 119 fl. und gewinnt bey seinem Verkauf so viele Procenten, als das Pferdt ihn überhaupt gekostet hat; wie theuer hat er es gekauft?

Es sey $a = 119$.

$x =$ Einkauf des Pferds; folgl. sind auch x Procent gewonnen worden.

nun inferirt man:

100 fl. gewinnen x fl. was gewinnt x?

so kommt $\frac{x^2}{100}$

Nun ist nach der Aufgabe der Gewinn und der Einkauf zusammen gleich dem Verkauf; folglich

$$\frac{x^2}{100} + x = a.$$

$$x^2 + 100x = 100a$$

$$x^2 + 100x + 50^2 = 100a + 2500$$

$$x + 50 = \sqrt{(100a + 2500)}$$

$$x = \sqrt{(100a + 2500)} - 50$$

$$= \sqrt{(14400)} - 50 = 120 - 50 = 70.$$

folglich war der Einkauf $= 70$

und der Gewinst $= 49$;

denn $70 + 49 = 119$.

*) Man solle zwey Zahlen finden, deren Produkt 35, und die Summe ihrer Quadrate 74 sey.

$xy = a$ $\quad x^2 + y^2 = b$ $\quad a = 35$

$x = \frac{a}{y}$ $\quad x^2 = b - y^2$ $\quad b = 74$

$$x^2 = \frac{a^2}{y^2}$$

a^2

$$\frac{a^2}{y^2} = b - y^2$$
$$a^2 = by^2 - y^4$$
$$y^4 - by^2 = -a^2$$
$$y^4 - by^2 + \frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - a^2$$
$$y^2 - \frac{b}{2} = \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - a^2\right)}$$
$$y^2 = \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - a^2\right)} + \frac{b}{2}$$
$$y = \sqrt{\sqrt{\left[\left(\frac{b^2}{4} - a^2\right) + \frac{b}{2}\right]}}$$
$$y = \sqrt{\sqrt{[(144) + 37]}}$$
$$y = \sqrt{(12 + 37)} = \sqrt{49} = 7$$
folglich $x = \frac{35}{7} = 5$.

*) Man solle zwey Zahlen finden, deren Summen, Produkt und Differenz der Quadrate gleich, oder einerley sind.

I.) $x + y = xy$
II.) $x^2 - y^2 = xy$
$x + y = x^2 - y^2$
$x + y = (x - y)(x + y)$ und, wenn man dividirt,
$1 = x - y$
$1 + y = x$
III.) $1 + 2y = x + y$ um das folgende zu erhalten.
$1 + 2y = xy$ aus n. I.
$1 + 2y = (1 + y)y$ aus n. III.
$1 + 2y = y + y^2$
$1 + 2y - y = y^2$
$1 + y = y^2$

$1 = y^2 - y$ eine unreine quadrat. Gleich.

$1 + \frac{1}{4} = y^2 - y + \frac{1}{4}$

$\pm\sqrt{(1+\frac{1}{4})} = y - \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \pm \sqrt{(1+\frac{1}{4})} = y$

Und also $x = 1 + y$ nach n. III.

$x = 1 + \frac{1}{2} \pm \sqrt{(1+\frac{1}{4})}$

(Clemms Lehrbuch, I. Th. S. 123.)

*) Es wird in einem Rechnungsbuch ein Produkt 13090 angetroffen, von den multiplicirenden Zahlen aber sind einige ausgelöscht; man solle sie wieder herstellen.

Es sey $\begin{array}{r} 1{*}0 \\ {**} \\ \hline 13090 \end{array}$

Um nun eine Gleichung zu erhalten, da vorausgesezt wird, daß der Fall aus der decadischen Arithmetik sey, wo die Zahlen in 10facher Verhältnis fortgehen, so sey:

$$\begin{array}{r} 100 + 10x \\ 10x + x \\ \hline 100x + 10x^2 \\ 1000x + 100x^2 \\ \hline 1100x + 110x^2 \end{array}$$

$110x^2 + 1100x = 13090$ (mit 10 divid.)

$11x^2 + 110x = 1309$ (mit 11 divid.)

$x^2 + 10x = 119$

$x^2 + 10x + 25 = 144$

$x + 5 = 12$

$x = 12 - 5 = 7.$

also $\begin{array}{r} 170 \\ 77 \\ \hline 1190 \\ 1190 \\ \hline 13090. \end{array}$

§. 172.

Aufgabe.

Aus einem theils rationalen theils irrationalen Binomium, dieser Form $m + \sqrt{n}$, die Quadratwurzel zu extrahiren.

Aufl. Es sey einer binomischen Wurzel $x + y$ ihr Quadrat $x^2 + 2xy + y^2$, so wird $x^2 + y^2$ allemal eine rationale Grösse seyn, auch wenn x und y eine Radicalgrösse enthalten, und $2xy$ wird der Radicaltheil seyn: setzet man also den Theil des Rationalquadrats $x^2 + y^2 = m$, und den Irrationaltheil $2xy = \sqrt{n}$, so ist

$$x^2 + y^2 = m \text{ und } 2xy = \sqrt{n} \text{ also}$$

$$4x^2y^2 = n \text{ und } y^2 = \frac{n}{4x^2}$$

und diesen Werth in der vorigen Gleichung substituirt

$$x^2 + \frac{n}{4x^2} = m$$

$$x^4 + \tfrac{1}{4}n = mx^2$$

$$x^4 - mx^2 + \tfrac{1}{4}n = 0$$ (ist eine unreine quadratische Gleichung.)

und das Quadrat ergänzet, und die Wurzel extrahirt

$$x^2 = \tfrac{1}{2}m \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}m^2 - \tfrac{1}{4}n)} = \tfrac{1}{2}m \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(m^2 - n)}$$

und noch einmal extrahirt

$$x = \pm\sqrt{\left[\frac{m \pm \sqrt{(m^2 - n)}}{2}\right]}$$

Ferner, aus der ersten Gleichung ist

$$y^2 = m - x^2 = m \frac{-m \mp \sqrt{(m^2 - n)}}{2}$$

$$= \frac{2m - m \mp \sqrt{(m^2 - n)}}{2}$$

$$= \frac{m \mp \sqrt{(m^2 - n)}}{2}$$

daher $y = \pm \sqrt{\left[\frac{m \mp \sqrt{(m^2 - n)}}{2}\right]}$

daher $x + y = \pm \sqrt{\left[\frac{m \pm \sqrt{(m^2 - n)}}{2}\right]} \pm$

$$\pm \sqrt{\left[\frac{m \mp \sqrt{(m^2 - n)}}{2}\right]}$$

welche Werthe, besonders geschrieben, auf diese 4 reducirt werden:

$$+\sqrt{\left[\frac{m + \sqrt{(m^2 - n)}}{2}\right]} + \sqrt{\left[\frac{m - \sqrt{(m^2 - n)}}{2}\right]}$$

$$+\sqrt{\left[\frac{m + \sqrt{(m^2 - n)}}{2}\right]} - \sqrt{\left[\frac{m - \sqrt{(m^2 - n)}}{2}\right]}$$

$$-\sqrt{\left[\frac{m + \sqrt{(m^2 - n)}}{2}\right]} + \sqrt{\left[\frac{m - \sqrt{(m^2 - n)}}{2}\right]}$$

$$-\sqrt{\left[\frac{m + \sqrt{(m^2 - n)}}{2}\right]} - \sqrt{\left[\frac{m + \sqrt{(m^2 - n)}}{2}\right]}$$

Denn es ist offenbar, daß die 4 übrige Combinationen mit diesen übereinstimmen. Es geben aber die erste und vierte davon die Wurzel des Binomiums $m + \sqrt{n}$; die 2te und 3te die Wurzel des Binomiums $m - \sqrt{n}$; und die 4te ist einerley mit der ersten, negativ genommen, wie die 3te mit der 2ten.

Es werden also in Anwendung auf besondere Beyspiele die gegebenen Werthe der Grössen m und n

in diesen Formuln substituirt. So oft ein gegebenes Binomium eine Quadratwurzel hat, die man ausziehen kann, so wird $m^2 - n$ immer ein vollkommenes Quadrat seyn, und nach Ausziehung der Wurzel wird die Formul auf 2 einfache Radicalglieder gebracht werden; wenn aus einem derselben die Wurzel gezogen werden kann, so wird ein Theil der gefundenen Wurzel rational seyn, im andern aber beyde irrational. Die Glieder der gegebenen Wurzel werden entweder eben dasselbe Zeichen haben, oder entgegengesezte; je nachdem die Glieder des gegebenen Binomiums von einerley oder entgegengesezten Zeichen sind.

§. 173.

Beyspiele.

I.) Man suchet $\sqrt{(3+\sqrt{8})}$. So ist $m=3$, $n=8$, $m^2-n=9-8=1$. und diese Werthe substituirt

$$x+y=\sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{1}}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{3-\sqrt{1}}{2}\right)}=$$
$$=\sqrt{\tfrac{4}{2}}+\sqrt{\tfrac{2}{2}}=1+\sqrt{2}.$$

Also ist die gesuchte Wurzel $=1+\sqrt{2}$, welche einmal mit sich multiplicirt, das gegebene Binomium wieder herstellt $=3+\sqrt{2}$.

II.) Man suchet $\sqrt{(7+\sqrt{40})}$. So ist $m=7$, $n=40$; also $m^2-n=49-40=9$; und diese Werthe substituirt, $x+y=\sqrt{\left(\frac{7+\sqrt{9}}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{7-\sqrt{9}}{2}\right)}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$. Welches die gesuchte Wurzel ist, und einmal mit sich multipli-

tiplicirt, das gegebene Binomium herstellt: $7 + \sqrt{40}$.

III.) Man suchet $\sqrt{(16 - 6\sqrt{7})} = \sqrt{(16 - \sqrt{252})}$ So ist $m = 16$, $n = 252$; also $m^2 - n = 256 - 252 = 4$. Und diese Werthe substituirt, ist $x + y = \sqrt{\left(\frac{16 + \sqrt{4}}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{16 - \sqrt{4}}{2}\right)} = \sqrt{\frac{18}{2}} - \sqrt{\frac{14}{2}} = 3 - \sqrt{7}$, dessen Quadrat ist $9 - 6\sqrt{7} + 7 = 16 - 6\sqrt{7}$, welches das gegebene Binomium ist.

IV.) Man suchet $\sqrt{(19 + 8\sqrt{3})} = \sqrt{(19 + \sqrt{192})}$. So ist $m = 19$, $n = 192$, $m^2 - n = 361 - 192 = 169$. Und diese Werthe substituirt, ist $x + y = \sqrt{\left(\frac{19 + \sqrt{169}}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{19 - \sqrt{169}}{2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{19 + 13}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{19 - 13}{2}\right)} = 4 + \sqrt{3}$, welches die gesuchte Wurzel ist.

V.) Man suchet $\sqrt{(27 + 10\sqrt{2})} = \sqrt{(27 + \sqrt{200})}$. So ist $m = 27$, $n = 200$. $m^2 - n = 729 - 200 = 529$. Und diese Werthe substituirt, $x + y = \sqrt{\left(\frac{27 + \sqrt{529}}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{27 - \sqrt{529}}{2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{27 + 23}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{27 - 23}{2}\right)} = 5 + \sqrt{2}$.

VI.) Man suchet $\sqrt{(5 + \sqrt{8})}$. So ist $m = 5$, $n = 8$, $m^2 - n = 25 - 8 = 17$. Also

$\sqrt{(m^2 - n)} = \sqrt{17}$. Da nun aus 17 die Wurzel nicht genau ausgezogen werden kann, so ist es ein Beweis, daß das gegebene Binomium keine extrahible Wurzel habe.

VII.) Man sucht $\sqrt{(1 + 4\sqrt{-3})} = \sqrt{(1 + \sqrt{-48})}$. So ist $m = 1$, $n = -48$, $m^2 - n = 1 + 48 = 49$, und diese Werthe substituirt, ist

$$x + y = \sqrt{\left(\frac{1 + \sqrt{49}}{2}\right)} + \sqrt{\left(\frac{1 - \sqrt{49}}{2}\right)} =$$

$$= 2 + \sqrt{-3}.$$

Anmerkung. Wenn in dem gegebenen Binomium das unter dem Radicalzeichen stehende Glied ein vollkommenes Quadrat ist, so kann nach dieser Methode die Wurzel nicht gefunden werden. Z. B. Man sucht $\sqrt{(6 + \sqrt{9})}$ so ist $m = 6$, $n = 9$, $m^2 - n = 36 - 9 = 27$, daraus die Quadratwurzel nicht gezogen werden kann, und doch hat das gegebene Binomium die Wurzel 3. Nemlich in diesem Falle muß aus dem Theil $\sqrt{9}$ zuvor die Wurzel ausgezogen werden, 3, so wird $6 + \sqrt{9} = 9$, dessen Wurzel $= 3$.

Das dritte Kapitel.

Von Auflösungen der Gleichungen dritten Grades.

§. 174.

Ehe wir zu den Auflösungen der Gleichungen dritten Grades selbst schreiten, wollen wir einige Lehrsätze anführen, worinnen ihre Eigenschaften erläutert werden; und bey deren aufmerksamer Betrachtung und Einsicht ihre Auflösungen selbst viel leichter werden gemacht werden.

§. 175.

Lehrsätze von den Eigenschaften der Gleichungen dritten Grades.

Lehrsatz.

Eine Gleichung dritten Grades kann entweder alle drey Wurzeln real haben, oder eine real und zwey imaginär.

Beweis. Denn sie entstehet aus 2 Aequationen; einer vom zweyten und einer vom ersten Grad, welche einerley Wurzeln mit jener haben. Nun aber führet eine Gleichung ersten Grades kein Radicalzeichen mit sich, und ihre Wurzel ist daher immer real:

hingegen die Wurzeln der Aequation zweyten Grades sind entweder beyde real oder beyde imaginär.

§. 176.

Lehrsatz.

Wenn in einer Gleichung dritten Grades das zweyte Glied fehlet, und das dritte Glied positiv ist, so bekommt man nothwendig imaginäre Wurzeln.

Beweis. Denn wenn das zweyte Glied fehlt, so hebet die Summe der positiven Wurzeln die Summe der negativen auf; (§. 101. Zus. 6.) also ist entweder eine positive Wurzel zweyen negativen gleich, oder eine negative zweyen positiven; also werden die Wurzeln, wenn sie real sind, entweder $-a$, $-b$, $+c$, oder $+a$, $+b$, $-c$ seyn, und also wird der Coefficient des dritten Gliedes $ab-ac-bc$. Da also bey dem fehlenden zweyten Glied $a+b=c$ ist, so wird $ac>ab$, und also $ab-ac-bc$ wird eine negative Grösse seyn, das ist, wenn alle Wurzeln real sind, so muß das dritte Glied negativ seyn; ist es demnach positiv, so können nicht alle Wurzeln real seyn, und daher werden 2 davon nothwendig imaginär seyn müssen. (§. 175.)

§. 177.

Lehrsatz.

Wenn in einer Gleichung dritten Grades zwey Wurzeln imaginär sind, so hat die dritte reale allemal ein Zeichen, das dem Zeichen des lezten Gliedes der Gleichung entgegengesezt ist.

Beweis. Damit nemlich jene Gleichung des 2ten Grades, aus welcher die Gleichung dritten Grades zusammengesezt ist, 2 imaginäre Wurzeln habe, so muß ihr leztes Glied positiv seyn. (§. 164. Zus. 5.) Also muß auch das Produkt aller 3 Wurzeln, oder das lezte Glied der Gleichung dritten Grades, (§. 99.) das nach der Voraussetzung rational ist, ein Zeichen haben, das der realen Wurzel entgegengesezt ist.

Z. B. Die Gleichung $x^3 - 6x^2 + 13x - 20$ hat die reale Wurzel 4, und das lezte Glied -20 negativ. Die Gleichung $x^3 + 2x^2 - -3x + 20 = 0$ hat die reale Wurzel -4, und das lezte Glied $+20$ positiv.

§. 178.

Lehrsatz.

Wenn eine Gleichung dritten Grades auf einen niedrigeren Grad deprimirt werden kann, so hat sie nothwendig einen Divisor von zwey Dimensionen von der Form $x \pm a$.

Beweis. Denn sie wird entweder aus 3 einfachen Aequationen der Form $x \pm a$, oder aus einer einfachen, und einer anderen zweyten Grades zusammengesezt; kann sie also zu einem niedrigeren Grad deprimirt werden, so kann man sie immer durch eine einfache Gleichung der Form $x \pm a$ dividiren.

Z. B. Die Gleichung $x^3 - 6x^2 + 13x - 20 = 0$ kann durch die Division mit $x - 4$ auf $x^2 - 2x + 5 = 0$ deprimirt werden.

Zusatz. Hieher gehören die Gleichungen dritten Grades, denen das lezte Glied fehlet, und unter dieser Formul begriffen sind: $x^3 + px^2 + qx = 0$; sie wer-

werden durch die Division mit $x=0$, immer auf $x^2+px+q=0$ deprimirt.

§. 179.

Lehrsatz.

In Gleichungen dritten Grades, bey denen das zweyte Glied fehlt, ist jede der drey Wurzeln gleich der Summe der übrigen, die mit dem entgegengesezten Zeichen genommen wird.

Beweis. Es seyen diese drey Wurzeln a, b, c; da das zweyte Glied fehlt, so ist die Summe derselben $a+b+c=0$, (§. 101. Zus. 6.) also ist $a=-(b+c)$, $b=-(a+c)$, $c=-(a+b)$.

Zusatz 1. Damit also die Summe der Wurzeln, oder der Coefficient des zweyten Gliedes $=0$ werde, so müssen entweder 2 derselben negativ und eine positiv seyn, oder 2 positiv und eine negativ: denn wenn entweder alle 3 positiv, oder alle negativ wären, so könnte ihre Summe nicht $=0$ seyn; also würde auch das 2te Glied nicht fehlen.

Zusatz 2. Hiemit muß jene Wurzel, welche das verkehrte Zeichen von den beyden anderen hat, grösser als eine jede derselben seyn, da sie ihrer Summe gleich ist; daher muß sie die gröste von den Wurzeln seyn.

Zusatz 3. Die gröste Wurzel hat allemal das verkehrte Zeichen vom lezten Glied. Denn da das Produkt der übrigen, die das nemliche Zeichen haben, allemal positiv ist, so hat das Produkt aller dreyen allemal das Zeichen der grösten Wurzel: es ist aber dieses Produkt, mit dem verkehrten Zeichen genommen, das lezte Glied der Gleichung. (§. 99.)

Zusatz 4. Wenn beyde Wurzeln imaginär sind, so ist die 3te reale Wurzel allemal die gröste. Denn wenn 2 Wurzeln imaginär sind, so hat die 3te reale allemal ein entgegengesetztes Zeichen vom lezten Glied: (§. 177.) also ist sie die gröste. (Zus. 3.)

Zusatz 5. Wenn zwey Wurzeln von einerley Zeichen einander gleich sind, so ist eine jede derselben so groß als die Hälfte der größten Wurzel mit dem verkehrten Zeichen; da die gröste Wurzel also genommen gleich seyn muß der Summe der übrigen, damit das zweyte Glied der Aequation fehlen könne.

Zusatz 6. Und da jene 3te Wurzel, oder die die gröste, allemal real ist, wenn beyde andere imaginär sind, (§. 177.) und die Hälfte einer realen Wurzel ebenfalls real ist, so ist offenbar, daß beyde imaginäre Wurzeln in dergleichen Aequationen nothwendig einander gleich seyn müssen.

§. 180.

Lehrsatz.

Wenn eine Gleichung dritten Grades, darinnen das zweyte Glied fehlet, zwey gleiche Wurzeln hat, so wird immer der Coefficient des dritten Gliedes negativ seyn, und $\frac{3}{4}$ des Quadrats der grösten Wurzel enthalten; das lezte Glied aber wird $\frac{1}{4}$ des Cubus eben derselben grösten Wurzel enthalten.

Beweis. Es sey nemlich die gröste Wurzel $= 2a$, so ist das Quadrat davon $= 4a^2$, und der Cubus $= 8a^3$, und jede der beyden kleineren Wurzeln $= -a$, (§. 179. Zus. 5.) und ihr Produkt $= a^2$ jedesmal positiv; hingegen ist das Produkt der grösten mit einer

ner von den kleineren $= -2a^2$ jedesmal negativ: daher wird die Summe der Produkte aus jedem Paar, oder der Coefficient des 3ten Gliedes $= -2a^2 - 2a^2 + a^2 = -3a^2$ allemal negativ, und gleich $\frac{3}{4}$ des Quadrats der grösten Wurzel $4a^2$. Das Produkt aller Wurzeln zusammen aber, oder das lezte Glied der Aequation wird $= 2a . a^2 = 2a^3$, oder $\frac{1}{4}$ des Cubus der grösten Wurzel $8a^3$.

§. 181.

Lehrsatz.

In eben dem Fall ist der Cubus von $\frac{1}{3}$ des Coefficienten des dritten Gliedes, welcher Cubus im verkehrten Zeichen genommen wird, gleich der Hälfte des Quadrats des lezten Gliedes.

Beweis. Es sey die Gleichung $x^3 + qx + r = 0$, so sage ich, es sey $-\frac{1}{27}q^3 = \frac{1}{4}r^2$. Denn nach vorigem Lehrsatz ist der Coefficient des 3ten Gliedes $q = -3a^2$, und $r = 2a^3$; also ist $\frac{1}{3}q = -a^2$, und also $\frac{1}{27}q^3 = -a^6$, oder $-\frac{1}{27}q^3 = a^6$. Eben so $\frac{1}{2}r = a^3$, und also $\frac{1}{4}r^2 = a^6$, demnach $-\frac{1}{27}q^3 = \frac{1}{4}r^2$.

Zusatz. Wenn also $-\frac{1}{27}q^3 = \frac{1}{4}r^2$, oder $\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3 = 0$, so hat die Gleichung zwey kleinere Wurzeln unter sich gleich, und die gröste Wurzel ergibt sich entweder $= \sqrt{-\frac{4}{3}q} = 2\sqrt{-\frac{1}{3}q}$; oder $= \sqrt[3]{-4r}$ (§. 180.) mit dem vorangesezten verkehrten Zeichen vom lezten Gliede r: (§. 179. Zus. 3.) die kleinere Wurzeln aber werden die Hälften der grösten seyn, mit dem entgegengesezten Zeichen. (§. 179. Zus. 5.)

Z. B. In der Aequation $x^3 - 12x + 16 = 0$, ist $q = -12$, $r = 16$, und also $\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3 = 64 - 64 = 0$. Also hat diese Gleichung zwey kleine unter sich gleiche Wurzeln, und die gröste Wurzel ist $= 2\sqrt{-\frac{1}{3}q} = 2\sqrt{4} = -4$, da das lezte Glied positiv ist; daher sind die kleinere Wurzeln 2 und 2.

§. 182.

Lehrsatz.

Wenn in einer Gleichung dritten Grades, worinnen das zweyte Glied fehlet, zwey Wurzeln, welche einerley Zeichen haben, real, und einander ungleich sind; so wird 1.) der Coefficient des dritten Gliedes immer noch negativ seyn, 2.) das lezte Glied wird das entgegengesezte Zeichen von der grösten Wurzel haben, 3.) das Quadrat der grösten Wurzel wird kleiner seyn, als $\frac{4}{3}$ des Coefficienten des dritten Gliedes, jedoch aber grösser, als eben dieser Coefficient selbst, mit dem entgegengesezten Zeichen genommen; 4.) der Cubus aber derselben wird grösser seyn, als das 4fache des lezten Gliedes.

Beweis.

1.) Es sey nemlich eine solche Gleichung $x^3 + qx + r = 0$; deren kleinere Wurzeln sind $-a+b$, und $-a-b$, demnach ihre Summe $= -2a$, daher die gröste Wurzel $= 2a$; (§. 101. Zus. 6.) ihr Produkt $= a^2 - b^2$, die Produkte der grösten Wurzel mit den einzelnen $= -2a^2 + 2ab - 2a^2 - 2ab = -4a^2$; demnach wird die Summe der Produkte

oder

oder der Coefficient des 3ten Glieds $q = a^2 - b^2 - - 4a^2 = -3a^2 - b^2$ immer negativ seyn, weil die Grössen a^2 und b^2 immer positiv sind, da ein jedes Quadrat immer positiv ist.

2.) Das Produkt aller Wurzeln, oder das lezte Glied wird seyn $= 2a(a^2 - b^2) = 2a^3 - 2ab^2$, und demnach $r = -2a(a^2 - b^2)$ (§. 99.) welches immer ein entgegengesezter Werth von 2a seyn wird.

3.) Da $q = -3a^2 - b^2$ ist, so wird $-\frac{1}{3}q = = a^2 + \frac{1}{3}b^2$, und daher $-\frac{4}{3}q = 4a^2 + \frac{4}{3}b^2$, also $4a^2 < -\frac{4}{3}q$, oder das Quadrat der grösten Wurzel wird kleiner seyn, als $\frac{4}{3}$ des negativ genommenen Coefficienten q. Da aber die Wurzel $-a-b$ kleiner ist, als die gröste Wurzel negativ genommen, oder $-a-b < -2a$, so wird $-b < -a$, oder $b < a$ und $b^2 < a^2$: also $3a^2 + b^2$ oder $-q < 3a^2 + a^2$, das ist, $4a^2 > -q$, oder das Quadrat der grösten Wurzel ist grösser als der negativ genommene Coefficient q.

4.) Endlich, da $r = -2a(a^2 - b^2) = -2a^3 + 2ab^2$, so ist $r + 2a^3 = 2ab^2$, und also $2ab^2 > r$, und noch vielmehr $2a^3 > r$, also auch $8a^3 > 4r$, d. i. der Cubus der grösten Wurzel ist grösser, als das 4fache des lezten Gliedes.

Zusatz. Wenn jene beyde einerley Zeichen habende Wurzeln imaginär sind, so kann der Coefficient des 3ten Gliedes sowohl positiv als negativ seyn; und zwar, wenn er negativ ist, so wird das Quadrat der realen Wurzel allemal grösser seyn, als $\frac{4}{3}$ desselben, und der Cubus eben dieser Wurzel wird kleiner seyn, als das 4fache des mit dem verkehrten Zeichen genommenen lezten Gliedes. Denn daß die Wurzel $-a+b$ imagi-

imaginär sey, muß b die Quadratwurzel der negativen Grösse seyn, und also b^2 eine negative Grösse; also $-b^2$ eine positive: daher $q = -3a^2 - b^2$ positiv seyn kann, wenn nemlich $-b^2 > -3a^2$; oder negativ, wenn $-b^2 < -3a^2$, oder wenn $b^2 > 3a^2$, in welchem Fall $3a^2 > q$ wird, und daher $a^2 > \frac{1}{3}q$, und $4a^2 > \frac{4}{3}q$; d. i. das Quadrat der realen Wurzel ist grösser als $\frac{4}{3}$ des Coefficienten q. Aber in eben dem Fall ist $a^2 - b^2$ immer eine positive Grösse, indem sowohl a^2 jedesmal, als b^2 in diesem Fall positiv ist; daher $a^2 - b^2 > a^2$, und also $2a(a^2 - b^2)$ oder $-r > 2a^3$ und $-4r > 8a^3$.

§. 183.

Lehrsatz.

Die Grösse $\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3$, welche in dem Fall zweyer gleichen Wurzeln $= 0$ wird, ist in dem Fall zweyer imaginärer allemal positiv, im Fall aller realen Wurzeln allemal negativ.

Beweis. Denn es sey im Fall aller realen Wurzeln die gröste Wurzel $= 2a$, so wird nach obigem (§. 182.) $4a^2 < -\frac{4}{3}q$ und $8a^3 > 4r$: daher $a^2 < -\frac{1}{3}q$ und $a^3 > \frac{1}{2}r$: und also nach Elevation dort zum Cubus und hier zum Quadrat, wird $a^6 < -\frac{1}{27}q^3$, und $a^6 > \frac{1}{4}r^2$, und daher $-\frac{1}{27}q^3 > \frac{1}{4}r^2$; folglich, da in diesem Fall der Coefficient q allemal negativ ist, (§. 182.) so wird die Grösse $\frac{1}{27}q^3 + \frac{1}{4}r^2$ allemal negativ seyn. Im Fall aber zweyer imaginärer Wurzeln, wenn der Coefficient q positiv ist, erhellet, daß die Grösse $\frac{1}{27}q^3 + \frac{1}{4}r^2$ positiv sey: wenn er aber negativ ist, so wird $4a^2 > -\frac{4}{3}q$, und $8a^3 < -4r$; (§. 182.) also $a^2 > -\frac{1}{3}q$, demnach

$a^6 > -$

$a^6 > -\frac{1}{27}q^3$; und $a^3 < -\frac{1}{2}r$, also $a^6 < \frac{1}{4}r^2$: also $\frac{1}{4}r^2 > -\frac{1}{27}q^3$, und daher wird $\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3$ abermal eine positive Grösse seyn.

Zusatz. Aus dem bisherigen wird nicht schwer zu beurtheilen seyn, ob eine gegebene Gleichung dritten Grades, in welcher das zweyte Glied fehlet, zwey gleiche Wurzeln habe? ob sie zwey imaginäre, ob sie alle drey real habe? wie aus folgenden Beyspielen noch deutlicher werden wird.

§. 184.

Beyspiele.

I.) Es sey die Gleichung dritten Grades, in welcher das zweyte Glied fehlet $x^3 - 27x + 54 = 0$. So wird $r = 54$, $q = -27$; daher $\frac{1}{2}r = 27$, $\frac{1}{4}r^2 = 729$, $\frac{1}{3}q = -9$, $\frac{1}{27}q^3 = -729$: daher $\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3 = 729 - 729 = 0$, woraus erhellet, daß beyde Wurzeln unter sich gleich seyen. (§. 181. Zus.) Ferner die gröste Wurzel $= 2\sqrt{-\frac{1}{3}q} = (§.\ 180.)$ $= 2\sqrt{9} = -6$ wegen dem positiven lezten Glied der Gleichung: (§. 179. Zus. 3.) mithin werden die kleinere gleiche Wurzeln 3 und 3 seyn; die Hälften nemlich der grösten Wurzel -6, mit verkehrtem Zeichen genommen. (§. 179. Zus. 5.)

II.) Es sey die Gleichung $x^3 - 30x - 36 = 0$; so wird $r = -36$, $\frac{1}{2}r = -18$, $\frac{1}{4}r^2 = 324$; und $q = -30$; $\frac{1}{3}q = -10$; $\frac{1}{27}q^3 = -1000$: daher $\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3 = 324 - 1000 = -676$, und da diese Zahl negativ ist, so erhellet, daß alle Wurzeln real seyen, (§. 183.) deren gröste kleiner ist als $2\sqrt{-\frac{1}{3}q}$, gröser als $\sqrt{-q}$. (§. 183.) d. i. kleiner als $2\sqrt{10}$ oder $\sqrt{40}$ und gröser als $\sqrt{30}$; wenn sie also rational

tional ist, so muß sie unter den Divisoren des lezten Gliedes 1, 2, 3, 4, 6 ꝛc. enthalten seyn, und da sie zwischen den Gränzen $\sqrt{40}$ und $\sqrt{30}$ stecket, so kann sie nichts anders seyn als 6, welches sie auch würklich ist; wie es erhellet, wenn man substituiren will.

III.) Es sey die Gleichung $x^3 + 3x - 14 = 0$. Daraus, daß das 3te Glied $3x$ positiv ist, erhellet schon, daß zwey Wurzeln imaginär sind; indem dieses Glied negativ seyn muß, wenn alle Wurzeln real seyn sollen. (§. 183.) Eben dieses wird auch erhellen, wenn man statt q und r substituirt: denn es wird $r = -14$; $\frac{1}{2}r = -7$; $\frac{1}{4}r^2 = 49$; und $q = 3$; $\frac{1}{3}q = 1$; $\frac{1}{27}q^3 = 1$; daher $\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3 = 50$, und da diese Grösse positiv ist, so zeigt sich, daß beyde Wurzeln imaginär sind. (§. 183.) Die dritte reale Wurzel aber muß kleiner seyn, als $\sqrt[3]{-4r}$, (§. 181. Zus.) oder als $\sqrt[3]{56}$, folglich um so mehr kleiner, als $\sqrt[3]{64}$ oder als 4. Ist sie also rational, so muß sie unter den Divisoren des lezten Gliedes enthalten seyn, und wird entweder 1, oder 2 seyn, und sie ist würklich 2; dividirt man also mit $x - 2$, so wird die Gleichung auf $x^2 + 2x + 7 = 0$ deprimirt, deren Wurzeln sind $-1 \pm \sqrt{-6}$, beyde imaginär.

IV.) Es sey die Gleichung $x^3 - 3x - 14 = 0$: so wird $r = -14$; $\frac{1}{2}r = -7$; $\frac{1}{4}r^2 = 49$; und $q = -3$; $\frac{1}{3}q = -1$; $\frac{1}{27}q^3 = -1$; daher $\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3 = 48$: da diese Zahl positiv ist, so ist klar, daß beyde Wurzeln imaginär sind. Ferner, die reale Wurzel muß kleiner seyn, als $\sqrt[3]{-4r}$, oder als $\sqrt[3]{56}$, und grösser als $2\sqrt{-\frac{1}{3}q}$ oder als $2\sqrt{1}$, das ist, grösser als 2; wenn sie daher rational ist,

so

so kann sie nichts anders seyn, als ± 3, und da dies ses nicht unter den Divisoren des lezten Gliedes -14 vorhanden ist, so ist offenbar, die reale Wurzel sey irrational.

§. 185.

Aufgabe.

Gleichungen vom dritten Grade aufzulösen, in welchen nur das erste und lezte Glied vorhanden ist.

Auflösung. Alle dergleichen Gleichungen sind unter dieser Formul begriffen: $x^3 + r = o$. Also ist $x^3 = -r$, und $x = \sqrt[3]{-r}$. Welcher Ausdruck drey Werthe der Wurzel enthält, nemlich einen realen und zwey imaginäre. Denn es sey $r = -a^3$, so wird $x^3 = a^3$, und $x^3 - a^3 = o$, und dieses durch $x - a$ dividirt, wird $x^2 + ax + a^2 = o$, also $x = -\frac{1}{2}a \pm \pm \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - a^2)} = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{-\frac{3}{4}a^2} = -\frac{1}{2}a \pm \pm \frac{1}{2}a\sqrt{-3} = a. \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$. Man erhält also 3 Werthe der Wurzel x, nemlich $x = a$, $x = a. \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, $x = a. \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$.

Zusatz 1. Wenn also $a = 1$ ist, so werden es 3 Cubicwurzeln der Einheit, nemlich 1; $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$; $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$ seyn; da bey einer jeden der Cubus $= 1$ ist.

Zusatz 2. Eben so erhellet, daß die Cubicwurzeln einer jeden Grösse erhalten werden, wenn ihre reale

reale Wurzel mit diesen 3 Werthen multiplicirt wird: $1; \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}; \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$. z. B. Die Cubic-Wurzeln der Zahl 8 werden seyn: $2, 2.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, 2.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$. oder $2; -1+\sqrt{-3}; -1-\sqrt{-3}$, davon jedesmal der Cubus 8 ist.

*) §. 186.

Auf solche Aufgaben, wo x nur einmal, und zwar im Cubus vorkommt, (eine reine cubische Gleichung) wird man öfters geführet. Es ist demnach zu Auflösung ihrer Finalgleichung blos eine Extraktion der Cubikwurzel erforderlich.

*) Man soll eine Zahl finden, deren Quadrat mit ihrem vierten Theil multiplicirt, 432 ausmache.

$$x^2 . \frac{x}{4} = 432$$
$$\frac{x^3}{4} = 432$$
$$x^3 = 1728$$
$$x = \sqrt[3]{1728} = 12.$$

*) Eine Bäurin vertauscht Käse gegen Hühner, und gibt allemal 2 Käse für 3 Hühner; die Hühner legen Eyer, jede $\frac{1}{3}$ so viel, als der Hühner sind. Mit diesen Eyern geht sie zu Markte, und gibt allemal 9 Eyer für so viel Kreutzer, als eine Henne Eyer gelegt hat, und löset in allem zusammen 1 fl. 12 kr. (72 kr.).

Es fragt sich, wie viel hat die Bäurin Käse vertauscht?

Man nenne die Anzahl der Käse $= x$
so sind sie gegen $\frac{3}{2}x$ Hühner vertauscht worden.
Nun legt jede Henne
$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}x$ Eyer;
folglich ist die Anzahl aller Eyer
$\frac{3}{2}x \cdot \frac{1}{2}x = \frac{3}{4}x^2$
Und nun sucht man, was diese Eyer kosten:
9 Eyer ..... $\frac{1}{2}x$ ..... $\frac{3}{4}x^2 = \frac{1}{24}x^3$ kr.
$\frac{1}{24}x^3 = 72$
$x^3 = 1728$
$x = \sqrt[3]{1728} = 12.$

So viel Käse hatte die Bäurin, und vertauschte sie gegen 18 Hühner.

§. 187.

Aufgabe.

Generalformuln der Wurzeln zu finden, für jede Gleichung dritten Grades, welche alle Glieder hat.

Auflösung. Man hebe das zweyte Glied der Gleichung weg, so wird sie auf diese Form reduciret:

$$x^3 + qx + r = 0.$$

und weil durch dieses Wegheben des 2ten Gliedes die Wurzeln der gegebenen Gleichung um eine gegebene rationale Grösse vermehrt oder vermindert werden, so ist klar, daß die gegebene Gleichung sich in eben der Verhältniß gegen reale oder imaginäre Wurzeln befinde, wie ihre transformirte, worein sie durch Hebung des zweyten Gliedes verwandelt wird.

Es werde nun $x = y + u$, so gehet die Gleichung $x^3 + qx + r = o$ in folgende über:

$$\left.\begin{array}{l} y^3 + 3uy^2 + 3u^2y + u^3 \\ \qquad + qy + qu \\ \qquad\qquad + r \end{array}\right\} = o$$

weil die hier eingebrachte Grössen y und u unbestimmt sind, so kann eine davon nach Belieben angenommen werden: man setze, eine derselben y sey von der Beschaffenheit, daß der Theil der Gleichung $y^3 + r + u^3$ sey $= o$; da die ganze Aequation $= o$ ist, so ist auch ihr anderer Theil $3uy^2 + 3u^2y + qy + qu = o$, und wenn man ihn durch $y + u$ dividirt, so ist $3uy + q = o$. Und also $u = -\frac{q}{3y}$, und $u^3 = -\frac{q^3}{27y^3}$, und diesen Werth im ersteren Theil substituirt, wird

$$y^3 + r - \frac{q^3}{27y^3} = o,$$

oder $y^6 + ry^3 - \frac{1}{27}q^3 = o$

Dieses ist nun eine unreine quadratische Gleichung; und wenn diese folgender massen ergänzt und aufgelöst wird:

$$y^6 + ry^3 - \tfrac{1}{27}q^3 = o$$
$$y^6 + ry^3 = \tfrac{1}{27}q^3$$
$$y^6 + ry^3 + \tfrac{1}{4}r^2 = \tfrac{1}{4}r^2 + \tfrac{1}{27}q^3$$
$$y^3 + \tfrac{1}{2}r = \pm\sqrt{(\tfrac{1}{4}r^2 + \tfrac{1}{27}q^3)}$$
$$y^3 = -\tfrac{1}{2}r \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}r^2 + \tfrac{1}{27}q^3)}$$

so kommt endlich

$$y = \sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}r \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}r^2 + \tfrac{1}{27}q^3)}]}$$

Da der Werth y gefunden ist, so ergibt sich auch u leicht durch Hülfe der Aequation $y^3 + r + u^3 = o$; er ist nemlich $u^3 = -r - y^3$; oder, statt y^3 den aus der lezteren oberen Gleichung zu findenden Werth gesezt,

$$u^3 = -r + \tfrac{1}{2}r \mp \sqrt{(\tfrac{1}{4}r^2 + \tfrac{1}{27}q^3)} = -\tfrac{1}{2}r \mp \sqrt{(\tfrac{1}{4}r^2 + \tfrac{1}{27}q^3)}$$

und daher $u = \sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}r \mp \sqrt{(\tfrac{1}{4}r^2 + \tfrac{1}{27}q^3)}]}$

Nemlich wo der Werth y das Zeichen $\pm$ hat, da hat der Werth u das Zeichen $\mp$; wenn daher im Werth y das Zeichen + angenommen wird, so muß im Werth u das Zeichen — angenommen werden, und umgekehrt. Da also $x = y + u$, so wird

$$x = \sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}r \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}r^2 + \tfrac{1}{27}q^3)}]} + \sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}r \mp \sqrt{(\tfrac{1}{4}r^2 + \tfrac{1}{27}q^3)}]}$$

welche beyde Ausdrücke auf eines hinauslauffen, indem durch die Zeichen $\pm$ und $\mp$ blos die Ordnung zweyer Glieder verändert wird, ihre Summe aber eben dieselbe bleibet. Man hat also eine Formul für eine von den 3 Wurzeln der Gleichung, $x^3 + qx + r = o$.

Um die Formuln der beyden übrigen Wurzeln zu finden, so muß die gegebene Gleichung $x^3 + qx + r = o$ durch die Gleichung von einer Dimension $x - m - n = o$ dividirt werden, wo m das erste Glied bedeutet, und n das zweyte, von oben gefundenem Werth. Damit aber diese Division desto leichter von statten gehe, so hat man zu bemerken, daß wenn der vorigen Wurzel Theile m und n mit einander multiplicirt werden, $mn = -\sqrt[3]{+\tfrac{1}{27}q^3}$ werde, $= -\tfrac{1}{3}q$, und also $q = -3mn$: eben so, wenn die Cubi eben dieser Theile addirt werden, $m^3 + n^3 = -r$ werde, und also $r = -m^3 - n^3$. Wenn demnach in der gegebenen Gleichung $x^3 + qx + r = o$, statt q und r diese Werthe substituirt werden, so wird $x^3 - 3mnx - m^3 - n^3 = o$ und diese Gleichung durch $x - m - n$ dividirt, kommt $x^2 + mx + nx + m^2 + n^2 - mn = o$, deren Wurzeln sind

x=

$x = \frac{-m-n}{2} \pm \frac{1}{2}(m - n\sqrt{-3})$: folglich die Werthe m und n subſtituirt, wird

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}r \pm \sqrt{(\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3)}]}$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}r \mp \sqrt{(\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3)}]}$$
$$x = \pm[\frac{1}{2}\sqrt[3]{(-\frac{1}{2}r) \pm \sqrt{(\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3)}]}$$
$$-\frac{1}{2}\sqrt[3]{[-\frac{1}{2}r \mp \sqrt{(\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3)}]}\sqrt{-3}.$$

Zuſatz 1. Man hat alſo drey allgemeine Formuln für die Wurzeln einer Gleichung dritten Grades, worinnen das zweyte Glied fehlet; welche man gewöhnlich die Formuln des Cardans zu nennen pflegt. Ehe wir aber dieſelben etwas einfacher machen, ſo wollen wir die erſte Formul noch etwas genauer betrachten.

Zuſatz 2. In dem Radicalen $\sqrt{(\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3)}$ wird immer etwas imaginäres (imaginareitas) mit unterlauffen, wenn der Coefficient des dritten Gliedes q negativ iſt, und $\frac{1}{27}q^3 > \frac{1}{4}r^2$. In den übrigen Fällen aber wird es nicht involvirt ſeyn: denn $\frac{1}{4}r^2$, als das Quadrat der poſitiven Gröſſe, wird immer poſitiv, alſo kann die Gröſſe $\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3$ keinen negativen Werth haben, wenn nicht der Werth q negativ iſt, und $\frac{1}{27}q^3 > \frac{1}{4}r^2$.

Zuſatz 3. Da alſo im Fall aller realen Wurzeln dieſe Gröſſe allemal von negativem Werth iſt, im Fall zweyer imaginärer aber allemal poſitiven Werths, ſo wird ſie im erſten Falle allemal etwas imaginäres involviren, im 2ten aber nicht.

Zuſatz 4. Dieſes imaginäre zeiget ferner nicht an, daß die Wurzel x imaginär ſey, da in eben dem

nemlichen Fall alle 3 Wurzeln real sind, und das eingebildete zweyer Glieder sich vertilgt.

Zusatz 5. Und diese Fälle der Gleichungen dritten Grades pfleget man irreducibel zu nennen, weil nemlich wegen dem Imaginären, so im Radical $\sqrt{(\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3)}$ involvirt ist, die Wurzel im allgemeinen nicht herausgebracht werden kann, als durch Approximationen, wovon unten.

Anmerkung. Daß die Wurzeln im irreduciblen Falle real seyen, kann auch unmittelbar gezeigt werden. Denn wenn in der ersten Formul der Wurzeln $\frac{1}{2}r = a$, $\sqrt{(\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3)} = b\sqrt{-1}$, so wird $x = \sqrt[3]{(-a + b\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(-a - b\sqrt{-1})}$. Sucht man nun den Werth eines jeden dieser beyden Glieder durch unendliche Reihen, und addiret diese Reihen, so wird sich zeigen, daß in dieser Summe alle Glieder real seyn werden, und demnach auch der Werth x real sey. Eben so kann man auch zeigen, daß beyde übrige Werthe real seyn werden.

§. 188.

Aufgabe.

Die gefundene Formuln der Wurzeln auf einfachere Ausdrücke zu reduciren.

Auf l. Es werde

$$-\frac{1}{2}r + \sqrt{(\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3)} = c^3$$
$$-\frac{1}{2}r - \sqrt{(\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3)} = d^3,$$

so

so wird es die dreyfache Cubikwurzel von der vorigen ersteren seyn: nemlich

$$c,\ c.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ c.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2};$$

und von der lezteren ebenfalls die dreyfache, nemlich

$$d,\ d.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\ d.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2};$$

Nun können zwar diese 6 Werthe auf 9 Arten combiniret werden; weil aber aus der Aequation $3uy+q=0$ erhalten wird uy, oder hier $cd=-\frac{1}{3}q$ (S. im vorigen §.) so können nur diejenigen Werthe der Glieder y und u zu brauchen seyn, deren Produkt immer dieses cd ist: es sind aber diese: $c+d$,

$$c.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+d.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$

$$c.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+d.\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Es werde abermal $c=m+\sqrt{n}$, also $d=m-\sqrt{n}$, so wird $c+d=2m$, $c.\frac{1+\sqrt{-3}}{2}=(m+\sqrt{n}).$

$$\frac{1+\sqrt{-3}}{2}=\frac{-m+m\sqrt{-3}-\sqrt{n}+\sqrt{-3n}}{2};$$

und $d.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=(m-\sqrt{n}).\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=$

$$=\frac{-m-m\sqrt{-3}+\sqrt{n}+\sqrt{-3n}}{2},$$ deren Summe ist $\frac{-2m+2\sqrt{-3n}}{2}=-m+\sqrt{-3n}.$

Eben so $c.\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=(m+\sqrt{n}).$

$$\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\frac{-m-m\sqrt{-3}-\sqrt{n}-\sqrt{-3n}}{2}$$

und d. $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = (m-\sqrt{n}).\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} =$

$= \frac{-m+m\sqrt{-3}+\sqrt{n}-\sqrt{-3n}}{2}$, deren Summe ist $= \frac{-2m-2\sqrt{-3n}}{2} = -m-\sqrt{-3n}$.

Wir haben also einfachere Ausdrücke der 3 Wurzeln, $x = 2m$, $x = -m+\sqrt{-3n}$, $x = -m-\sqrt{-3n}$, davon die erste immer eine reale Wurzel hat; beyde andere eine reale, wenn n einen negativen Werth hat, oder $-3n$ einen positiven Werth; eine imaginäre, wenn n einen positiven Werth hat.

§. 189.

Aufgabe.

Aus einem theils radicalen, theils rationalen Binomium dieser Form $m+\sqrt{n}$ die Cubikwurzel zu extrahiren.

Auflösung. Es sey einer jeden binomischen Wurzel $x+y$ Cubus $= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$; diesen setze man $= m+\sqrt{n}$. Wenn in einer angenommenen Wurzel die Grösse x rational ist, und y irrational, so ist der Theil des Cubus x^3+3xy^2 rational und $= m$; der andere Theil $+3x^2y+y^3$ wird irrational seyn, und $=\sqrt{n}$. Damit nun vermittelst dieser 2 Gleichungen y weggeschafft werde, so nehme man aus der 2ten $y^3 = -3x^2y+\sqrt{n}$, und aus der ersten $y^2 = \frac{m-x^3}{3x}$, so kommt, mit y multiplis

tiplicirt, $y^3 = \frac{my - x^3y}{3x}$: daher beyde Werthe von y^3 zusammengesezt, ist

$$-3x^2y + \sqrt{n} = \frac{my - x^3y}{3x} \text{ oder}$$

$$-9x^3y + 3x\sqrt{n} = my - x^3y \text{ und}$$

$$3x\sqrt{n} = my + 8x^3y \text{ und}$$

$$\frac{3x\sqrt{n}}{m+8x^3} = y \text{ und ins Quadrat erhoben}$$

$$\frac{9nx^2}{(m+8x^3)^2} = y^2$$

und diesen Werth mit dem schon oben für y^2 gefundenen verglichen:

$$\frac{m - x^3}{3x} = \frac{9nx^2}{(m+8x^3)^2} \text{ oder}$$

$(m - x^3)(m + 8x^3)^2 = 27nx^3$ und, wirklich multiplicirt, und die Gleichung geordnet, kommt

$$64x^9 - 48mx^6 - 15m^2x^3 - m^3 = 0$$
$$+ 27nx^3$$

Sezet man nun in dieser lezten Gleichung $x^3 = \frac{1}{8}u$, so wird sie auf den 3ten Grad deprimirt, und das erste Glied hat keinen Coefficienten: denn es kommt

$$\frac{1}{2}u^3 - \frac{3}{4}mu^2 + \frac{27n - 15m^2}{8}u - m^3 = 0$$

und alles mit 8 multiplicirt

$$u^3 - 6mu^2 + (27n - 15m^2)u - 8m^3 = 0.$$

Aus der Auflösung dieser Gleichung wird nun u gefunden; und wenn u gefunden ist, so hat man auch $x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}u} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{u}$ und weil $y^2 = \frac{m - x^3}{3x}$ war, so

ergibt sich $y = \sqrt{\left(\frac{m - x^3}{3x}\right)}$. Wenn daher in jener Gleichung der Werth u gefunden wird, und die gegebene Werthe m und n substituirt werden, so hat man $x + y = \sqrt[3]{(m + \sqrt{n})}$ oder die Cubikwurzel des gegebenen Binomiums.

Zusatz 1. Um den Werth u aus jener cubischen Gleichung desto leichter herauszubringen, bemerke man, daß das erste Glied der gesuchten Wurzel x rational seyn muß: daher wird auch der Werth $u = 8x^3$ rational, der daher unter den Divisoren des lezten Gliedes $8m^3$ erscheinet. Ferner, da $\sqrt[3]{u} = 2x$, und rational seyn muß, so muß u eine rationale Cubikwurzel haben, und daher können unter den Divisoren des lezten Gliedes $8m^3$ nur diejenigen für x gebraucht werden, welche eine Cubikwurzel haben; und daher muß die Cubikwurzel der zur Probe zu nehmenden Divisoren unter den Divisoren der Cubikwurzel des lezten Gliedes $8m^3$ enthalten seyn, oder unter den Divisoren der Grösse 2m.

Zusatz 2. Und da, indem das Binomium ohne Bruch ist, auch x keinen haben darf, also auch x^3 oder $\frac{1}{8}u$, so muß der Divisor, den man für u nehmen will, durch 8 dividirt werden können, oder seine Cubikwurzel durch 2. Daher darf man es blos mit den Divisoren der Grösse m versuchen, und der gesuchte Werth u wird unter den Cubis dieser Divisoren, mit 8 multiplicirt, enthalten seyn. Und wenn hievon keiner Genüge leistet, so ist es ein Beweis, daß aus dem gegebenen Binomium die Cubikwurzel nicht ausgezogen werden könne.

Zusatz 3. Endlich, wenn $\sqrt{n}$ ein realer Werth ist, so wird auch der daher entspringende Werth y real seyn, also y^2 eine positive Grösse. Daher in der Aequation $x^3 + 3xy^2 = m$ das erste Glied, also auch der Werth m, positiv oder negativ seyn wird, je nachdem x das Zeichen + oder — hat; und also wird m und demnach auch u einerley Zeichen mit x haben; daher muß man, um den Werth u zu finden, nur Divisoren mit dem Zeichen des Werthes m gebrauchen: aber wenn $\sqrt{n}$ ein imaginärer Werth ist, so hat man es mit eben den Divisoren mit beyderley Zeichen zu versuchen.

Anmerkung. Wenn eine gegebene Zahl von der Form $m + \sqrt{n}$ zwar ohne allen Bruch ist, wie $2 + \sqrt{5}$, aber doch ihre Cubikwurzel $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ einen Bruch enthält, so reichet diese Methode nicht zu, sondern verführet öfters zu dem Urtheil, als ob diese Zahl keine solche Wurzel habe. Um also diese Gefahr zu vermeiden, suche man gerade zu, welche Beschaffenheit mit Brüchen verbundene Wurzeln ganzer Zahlen haben müssen. Man drücke zu dem Ende eine dergleichen Wurzel durch $\frac{a}{m} + \frac{b}{n}$ aus, so daß weder b noch n ausser der Einheit einen gemeinschaftlichen Divisor haben, so wird $(\frac{a}{m} + \frac{b}{n})^3 =$

$$= \frac{a^3}{m^3} + \frac{3a^2b}{m^2n} + \frac{3ab^2}{mn^2} + \frac{b^3}{n^3} =$$

$$= \frac{a^3}{m^3} + \frac{3ab^2}{mn^2} + (\frac{3a^2}{m^2n} + \frac{b^3}{n^3})b$$

wo die vorangehende 2 Glieder den rationalen Theil der gegebenen Zahl geben, beyde leztere aber

aber den irrationalen. Nun sollen nach der Voraussetzung sowohl der rationale Theil, als der Coefficient des irrationalen Theils ganze Zahlen seyn; man setze also $\frac{3a^2}{m^2n} + \frac{b^2}{n^3} = r$, so wird $b^2 = rn^3 - \frac{3a^2n^2}{m^2}$: nun aber sind b^2 wie auch rn^3 ganze Grössen; also ist auch $\frac{3a^2n^2}{m^2}$ also auch $\frac{3n^2}{m^2}$ eine ganze Grösse, oder n muß ein vielfaches vom Nenner m seyn. Man setze also $n = mt$, so wird $b^2 = rm^3t^3 - 3a^2t^2$: werden nun diese Werthe der Grössen n und b^2 in der ganzen Grösse $\frac{a^3}{m^3} + \frac{3ab^2}{mn^2}$ substituirt, so wird

$$\frac{a^3}{m^3} + \frac{3arm^3t^3}{m^3t^2} = 3art - \frac{8a^3}{m^3}$$

eine ganze Zahl: weil aber die Zahlen a und m keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, so kann diese Grösse keine ganze Zahl seyn, es sey denn $m = 1$ oder $= 2$. Also kann der erste rationale Theil der gesuchten Wurzel keinen anderen Nenner haben, als 2. Allein es kann auch der andere irrationale Theil keinen anderen haben; denn da $b^2 = rm^3t^3 - 3a^2t^2$, so wird $\frac{b}{t} = \sqrt{(rm^3t - 3a^2)}$ und daher

$$\frac{b}{mt} = \frac{b}{n} = \frac{1}{m}\sqrt{(rm^3t - 3a^2)}$$

wo der Nenner ist $= m$, also $= 2$. Wenn also der gegebenen Zahl $m + \sqrt{n}$, die aus lauter

lauter ganzen Zahlen bestehet, ihre Wurzel nach der vorhergehenden Methode nicht gefunden werden kann, so muß man diese Zahl mit 8 multipliciren, und sodann nach jener Methode ihre Wurzel suchen: wenn diese nicht herausgebracht werden kann, so ist es ein Zeichen, daß die vorgegebene Zahl keine Cubikzahl sey; kann sie aber herausgebracht werden, so ist die Hälfte der Wurzel die gesuchte Wurzel der gegebenen Zahl.

§. 190.

Beyspiele.

I.) Man suchet $\sqrt[3]{(-5+\sqrt{-2})}$: so wird $m=-5$, $n=-2$, also diese Werthe in der obigen cubischen Gleichung substituirt, ist

$$u^3+30u^2-429u+1000=0.$$

Nun hat $m=-5$ allein die Divisoren 1 und 5, deren Cubi multiplicirt mit 8 sind 8 und 1000: daher für u unter allen Divisoren des lezten Gliedes diese allein zu brauchen sind, aber mit beyderley Zeichen, weil der Werth n negativ ist. Und da die Gleichung dividirt werden kann durch $u-8$, so ist $u=8$, und daher $x=\frac{1}{2}\sqrt[3]{u}=1$. $y=\sqrt{\left(\frac{m-x^3}{3x}\right)}=\sqrt{\left(\frac{-5-1}{3}\right)}=$ $=\sqrt{-2}$: demnach ist die gesuchte Wurzel $=1+\sqrt{-2}$.

II.) Man suchet $\sqrt[3]{(80+48\sqrt{3})}=$ $=\sqrt[3]{(80+\sqrt{6912})}$. So ist $m=80$, $n=6912$; daher $u^3-480u^2+90624u-4096000=0$. Unter den Divisoren des Werths $m=80$, kommt

nun

nun 2 vor, dessen Cubus 8 mit 8 multiplicirt gibt 64, welches unter den Divisoren des lezten Gliedes vorkommt, und durch $u - 64$ kann die Gleichung genau dividirt werden: daher $u = 64$, und also $x = \frac{1}{2}\sqrt{u} = 2$ und $y = \sqrt{\left(\frac{m - x^2}{3x}\right)} = \sqrt{\left(\frac{80 - 8}{6}\right)} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Es ist also die gesuchte Wurzel $= 2 + 2\sqrt{3}$.

III.) Man suchet $\sqrt[3]{(7 + 5\sqrt{2})} = \sqrt[3]{(7 + \sqrt{50})}$: so ist $m = 7$, $n = 50$. Also $u^3 - 42u^2 + 615u - 2744 = 0$. Nun hat der Werth $m = 7$ allein die Divisoren 1 und 7, und der Cubus 1 mit 8 multiplicirt, oder 8, ist unter den Divisoren des lezten Gliedes, und die Aequation genau divisibel durch $u - 8$; also $u = 8$; demnach $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{u} = 1$, und $y = \sqrt{\left(\frac{m - x^3}{3x}\right)} = \sqrt{\left(\frac{7 - 1}{3}\right)} = \sqrt{2}$. Es ist also die gesuchte Wurzel $1 + \sqrt{2}$.

IV.) Man suchet $\sqrt[3]{(-10 + 9\sqrt{-3})} = \sqrt[3]{(-10 + \sqrt{-243})}$. Es ist also $m = -10$, $n = -243$; daher $u^3 + 60u^2 - 8061u + 8000 = 0$. Nun sind die Divisoren des Werths $m = 1, 2, 5, 10$; und zwar ist des Divisors 2 Cubus 8, mit 8 multiplicirt, oder 64, unter den Divisoren des lezten Gliedes, und thut, positiv genommen, eine Genüge, da die Aequation durch $u - 64$ sich genau dividiren läßt: Es ist also $u = 64$, und demnach $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{u} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{64} = 2$, und $y = \sqrt{\left(\frac{m - x^3}{3x}\right)} = \sqrt{\left(\frac{-10 - 8}{6}\right)} = \sqrt{-3}$. Also ist die gesuchte Wurzel $= 2 + \sqrt{-3}$.

V.) Man

V.) Man suchet $\sqrt[3]{(45-29\sqrt{2})} = \sqrt[3]{(45-\sqrt{1682})}$. So ist $m=45$, $n=1682$; also $u^3 - 270u^2 + 15039u - 729000 = 0$. Nun sind die Divisoren des Werths m oder $45 = 1, 3, 5, 9, 15, 45$; und zwar wird der Cubus des Divisors 3, nemlich 27, mit 8 multiplicirt, d. i. 216 unter den Divisoren des lezten Glieds angetroffen, und die Gleichung ist genau divisibel durch $u - 216$. Also ist $u = 216$, also $x = \frac{1}{2}\sqrt{u} = 3$, und $y = \sqrt{\left(\frac{m - x^3}{3x}\right)} =$

$= \sqrt{\left(\frac{45-27}{9}\right)} = \sqrt{2}$. Also ist die gesuchte Wurzel $= 3 - \sqrt{2}$.

VI.) Man suchet $\sqrt[3]{(20+\sqrt{392})}$; so ist $m=20$, $n=392$, daher $u^3 - 120u^2 + 4584u - 64000$. Die Divisoren des Werths m sind nun 1, 2, 4, 5, 10, 20; und zwar gibt des Divisors 2 Cubus 8, mit 8 multiplicirt, das Produkt 64, so unter den Divisoren des lezten Gliedes ist, und Genüge thut, denn die Gleichung ist genau divisibel durch $u - 64$. Also ist $u = 64$. Und $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{u} = 2$, und $y = \sqrt{\left(\frac{m - x^3}{3x}\right)} = \sqrt{\left(\frac{20-8}{6}\right)} = \sqrt{2}$. Daher ist die gesuchte Wurzel $= 2 + \sqrt{2}$.

§. 191.

Aufgabe.

Gleichungen dritten Grades aufzulösen, bey denen kein Glied fehlet.

Auflösung. Man hebe das zweyte Glied weg, und vergleiche die Aequation mit der allgemeinen Formul

mul $x^3 + qx + r = o$. Und die daher herausgebrachten Werthe der Grössen q und r substituire man in der ersten allgemeinen Formul der Wurzel x, so findet man die Werthe m und n, welche in den lezteren Formuln der Wurzeln, m, $-m + \sqrt{-3n}$, $-m - \sqrt{-3n}$, substituirt, die Wurzeln der Gleichung, darinnen das zweyte Glied fehlet, geben, und also auch die Wurzeln der gegebenen Gleichung, wie aus den Beyspielen erhellen wird.

Beyspiele.

I.) Es sey $y^3 - 6y^2 + 3y + 20 = o$.

Um das zweyte Glied wegzubringen, setze man $y = x + 2$, so ist nach geschehener Substitution

$$x^3 - 9x + 10 = o$$

und diese Aequation mit jener allgemeinen $x^3 + qx + r = o$ conferirt, ist $q = -9$, $r = 10$, und also $-\frac{1}{2}r = -5$, $\frac{1}{3}q = -3$. Also

$$\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{2\,7}q^3 = 25 - 27 = -2.$$ Folglich:

$$x = \sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}r + \sqrt{(\tfrac{1}{4}r^2 + \tfrac{1}{2\,7}q^3)}]} + \sqrt[3]{[-\tfrac{1}{2}r - \sqrt{(\tfrac{1}{4}r^2 + \tfrac{1}{2\,7}q^3)}]}$$

$$= \sqrt[3]{(-5 + \sqrt{-2})} + \sqrt[3]{(-5 - \sqrt{-2})}$$

und da $\sqrt{-2}$ etwas imaginäres involvirt, so erhellet schon, daß alle 3 Wurzeln real seyen. Ferner, die Cubikwurzel des Binomiums $-5 + \sqrt{-2}$ ist $1 + \sqrt{-2}$ und des Binomiums $-5 - \sqrt{-2}$ ist $1 - \sqrt{-2}$; daher ist $m = 1$, $n = 2$, werden Werthe in den Formuln der Wurzeln substituirt, so kommen der Gleichung $x^3 - 9x + 10 = o$ ihre Wurzeln 2, $-1 + \sqrt{6}$, $-1 - \sqrt{6}$. Welches erhellet durch Division mit $x - 2$, und Deprimirung der Gleichung auf $x^2 + 2x - 5 = o$. deren Wurzeln sind $-1 \pm \sqrt{6}$. Weil man aber sezte $y = x + 2$, so ist $y = 4$, $1 + \sqrt{6}$, $1 - \sqrt{6}$. Welches demnach

die

die Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, wie abermal erhellen wird, wenn durch Division mit $y-4$ die Gleichung deprimirt wird auf $y^2-2y-5=0$, wo die Wurzeln sind $1\pm\sqrt{6}$.

II.) Es sey $x^3-12x^2+41x-42=0$. Um das zweyte Glied zu heben, setze man $x=y+4$; so ist nach geschehenen Substitutionen $y^3-7y-6=0$. Daher $q=-7$, $r=-6$, $-\frac{1}{2}r=3$, $\frac{1}{3}q=-\frac{7}{3}$ also $\frac{1}{4}r^2+\frac{1}{27}q^3=9-\frac{343}{27}=-\frac{100}{27}$: daher $y=\sqrt[3]{(3+\sqrt{-\frac{100}{27}})}+\sqrt[3]{(3-\sqrt{-\frac{100}{27}})}$; es sind aber der Binomien $3+\sqrt{-\frac{100}{27}}$ und $3-\sqrt{-\frac{100}{27}}$ ihre Cubikwurzeln $=-1+\sqrt{-\frac{4}{3}}$ und $-1-\sqrt{-\frac{4}{3}}$, daher $m=-1$, $n=-\frac{4}{3}$. Werden diese Werthe substituirt, so erhält man drey Werthe y, nemlich -2, $1+\sqrt{4}$, $1-\sqrt{4}$, oder -2, 3, -1; weil man aber sezte $x=y+4$, so werden die Werthe x diese: 2, 7, 3.

III.) Es sey $x^3+15x^2+84x-100=0$. Um das zweyte Glied wegzuschaffen, sey $x=y-5$, so wird nach geschehenen Substitutionen $y^3+9y-270=0$. Daher $q=9$, $r=-270$, $-\frac{1}{2}r=135$, $\frac{1}{3}q=3$, also $\frac{1}{4}r^2+\frac{1}{27}q^3=18225+27=18252$, und also $y=\sqrt[3]{(135+\sqrt{18252})}+\sqrt[3]{(135-\sqrt{18252})}$: Es sind aber die Cubikwurzeln dieser Binomien $3+\sqrt{-12}$, und $3-\sqrt{-12}$. Daher $m=3$, $n=12$. Und substituirt man diese Werthe, so bekommt man drey Werthe y, nemlich 6, $-3+\sqrt{-36}$, $-3-\sqrt{-36}$. Und da man $x=y-5$ sezte, so werden die Wurzeln x die Werthe 1, $-8+\sqrt{36}$, $-8-\sqrt{-36}$.

IV.) Es sey $x^3+3x-14=0$; so wird $q=3$, $r=-14$, $\frac{1}{2}r=-7$, $\frac{1}{3}q=1$. Also $\frac{1}{4}r^2+\frac{1}{27}q^3=49$

$= 49 + 1 = 50$. und also $x = \sqrt[3]{(7 + \sqrt{50})} + \sqrt[3]{(7 - \sqrt{50})}$. Da nun $\sqrt{50}$ nichts imaginäres involvirt, wie auch in obigem Beyspiel, so ist klar, daß zwey Wurzeln imaginär und eine real seyn. Ferner sind der Binomien $7 + \sqrt{50}$ und $7 - \sqrt{50}$ ihre Cubikwurzeln $1 + \sqrt{2}$, und $-1 - \sqrt{2}$: daher $m = 1$, $n = 2$, dieses substituirt, sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung $2, -1 + \sqrt{-6}, 1 - \sqrt{-6}$; dieses erhellet auch, wenn die Gleichung durch Division mit $x - 2$ auf $x^2 + 2x + 7$ deprimirt wird, deren Wurzeln sind $-1 \pm \sqrt{-6}$.

V.) Es sey $x^3 + 3x - 4 = 0$. So ist $q = 3$, $\frac{1}{3}q = 1$, $r = -4$, $-\frac{1}{2}r = 2$; also $\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3 = = 1 + 4 = 5$. Daher $x = \sqrt[3]{(2 + \sqrt{5})} + \sqrt[3]{(2 - \sqrt{5})}$; woraus abermal erhellet, daß zwey Wurzeln imaginär seyen. Es sind aber der Binomien $2 + \sqrt{5}$ und $2 - \sqrt{5}$ ihre Cubikwurzeln $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$, und $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$, oder $\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{4}}$ und $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{5}{4}}$: also $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{5}{4}$. Substituirt man diese Werthe, so werden die Wurzeln der gegebenen Gleichung $1, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-15}$, $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-15}$. Und es wird auch die gegebene Gleichung, durch $x - 1$ dividirt, auf $x^2 + x + 4 = 0$, deprimirt, davon die Wurzeln sind $-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-15}$.

VI.) Es sey $x^3 - x + 6 = 0$, so wird $q = -1$, $\frac{1}{3}q = -\frac{1}{3}$, $r = 6$, $\frac{1}{2}r = 3$. Also $\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3 = = 9 - \frac{1}{27} = \frac{242}{27}$; daher $x = \sqrt[3]{(-3 + \sqrt{\frac{242}{27}})} + \sqrt[3]{(-3 - \sqrt{\frac{242}{27}})}$ deren Binomien Cubikwurzeln sind $-1 + \sqrt{\frac{2}{3}}$ und $-1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$; daher ist $m = -1$, $n = \frac{2}{3}$. Diese Werthe substituirt, erhält man drey Wurzeln der gegebenen Gleichung, -2, $1 + \sqrt{-2}$, $1 - \sqrt{-2}$. Wird nun durch Division

vision mit $x+2$ die Gleichung deprimirt auf $x^2 - 2x + 3 = 0$, so sind davon die Wurzeln $1 \pm \sqrt{-2}$.

VII.) Es sey $y^3 + 3y^2 - 3y + 25 = 0$. Um das 2te Glied zu heben, werde $y = x - 1$, so ist nach geschehenen Substitutionen $x^3 - 6x + 30 = 0$, wo $q = -6$, $\frac{1}{3}q = -2$, $r = 30$, $\frac{1}{2}r = 15$. Daher $\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3 = 225 - 8 = 217$, also $x = \sqrt[3]{(-15 + \sqrt{217})} + \sqrt[3]{(-15 - \sqrt{217})}$. Da diese Binomien nicht cubisch sind, (§. 189. Zus. 2.) so kann der Werth x daher nicht erhalten werden, als durch Annäherung, wie im folgenden wird gezeigt werden.

Anmerkung. Oefters kann der Grösse $-\frac{1}{2}r \pm \sqrt{(\frac{1}{4}r^2 + \frac{1}{27}q^3)}$ ihre Cubikwurzel von der Form $m \pm \sqrt{n}$ nicht gefunden werden, wie man in dem lezteren Beyspiel den Fall hatte: dieses ereignet sich immer, wenn die Gleichung dritten Grades (in propria sua sede ist, d. i.) durch Division nicht auf einen niedrigeren Grad deprimirt werden kann. Denn würde die Cubikwurzel von der Form $m \pm \sqrt{n}$ gefunden, so wäre m, also auch die erste der Wurzeln $2m$ eine rationale Grösse, und könnte die Gleichung durch Division mit $x - 2m$ deprimiret werden. Ja, obschon die Gleichung eine rationale Wurzel hat, und deprimirt werden kann, so kann doch zuweilen diese Form der Wurzel nicht erhalten werden. Daher man in diesen Fällen zu Näherungen (Approximationen) seine Zuflucht nehmen muß, wovon im folgenden wird gehandelt werden.

*) §. 192.

Aufgabe.

Eine cubische Gleichung durch Näherung aufzulösen, oder durch Erfindung der Schranken, zwischen welche die reale Wurzel fället, wenn eine vorhanden ist.

Auflösung.

I. Bey einer cubischen Gleichung, worinnen das andere Glied fehlet, sind die 3 hier vorkommende Fälle

$x^3 - px + q = o$
$x^3 + px - q = o$
$x^3 - px - q = o$

schon oben §. 124. b aufgelöset worden.

II. Wenn in einer cubischen Gleichung das dritte Glied fehlet, so kommen ebenfalls 3 Fälle vor:

$x^3 - px^2 + q = o$
$x^3 + px^2 - q = o$
$x^3 - px^2 - q = o$

Die Schranken werden auf die nemliche Weise gefunden.

III. Wenn in einer cubischen Gleichung kein Glied fehlet, so ergeben sich mehrere Fälle:

1.) $x^3 + ax^2 + bx = c$
2.) $x^3 - ax^2 - bx = c$
3.) $x^3 + ax^2 - bx = c$
4.) $x^3 - ax^2 + bx = c$
5.) $x^3 - ax^2 - bx = -c$
6.) $x^3 + ax^2 - bx = -c$
7.) $x^3 - ax^2 + bx = -c$

Im sechsten und siebenden Fall sind die Schranken leicht zu finden: nemlich
im 6ten Fall ist

$$x^3 + ax^2 - bx = -c$$
$$x^3 + ax^2 + c = bx$$
folglich $bx > c$
$$x > \frac{c}{b}$$
ferner $ax^2 < bx$
$$ax < b$$
$$x < \frac{b}{a}$$

Im 7den Fall ist

$$x^3 - ax^2 + bx = -c$$
$$x^3 + bx + c = ax^2$$
folglich $ax^2 > bx$
$$x > \frac{b}{a}$$
ferner $x^3 < ax^2$
$$x < a$$

In den übrigen Fällen, welche zwar auch auf diese Art aufzulösen sind, geräth man auf eine unreine quadratische Gleichung; man hat daher mehreren Vortheil davon, wenn man das andere Glied der cubischen Gleichung wegschafft. Es sey zur Uebung hier ein Beyspiel und Wiederholung dieses Verfahrens

$$x^3 + ax^2 + bx = c$$

Es sey $x = y + m$, so ist

$$x^3 = y^3 + 3y^2m + 3ym^2 + m^3$$
$$x^2 = y^2 + 2my + m^2$$
$$ax^2 = ay^2 + 2amy + am^2$$
$$bx = by + bm$$

folgl. $y^3 + 3my^2 + 3m^2y + m^3$
$+ ay^2 + 2amy + am^2 \} = c$
$+ by + bm$

soll nun das andere Glied wegfallen, so muß $3my^2$ und ay^2 einander aufheben; mithin wird sodann

$$3my^2 - ay^2 = 0$$
$$3my^2 = ay^2$$
$$3m = a$$
$$m = \frac{a}{3}$$

also ist statt $x = y + m$ zu substituiren:

$$x = y - \frac{a}{3}$$

folglich ist

$$x^2 = y^2 - \frac{2ay}{3} + \frac{a^2}{9}$$

$$x^3 = y^3 - ay^2 + \frac{a^2y}{3} + \frac{a^3}{9}$$

$$ax^2 = ay^2 - \frac{2a^2y}{3} + \frac{a^3}{9}$$

$$bx = by - \frac{ba}{3}$$

$$\text{mithin } y^3 - \frac{a^2y}{3} + by + \frac{2a^3}{27} - \frac{ba}{3} = c$$

Es sey ferner:

$$x^3 - 3x^2 + 4x = 32$$

so setze man $x = y + \frac{3}{3} = y + 1$

$$x^2 = y^2 + 2y + 1$$

$$\text{so ist } x^3 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1$$
$$-3x^2 = -3y^2 - 6y - 3$$
$$+4x = \qquad 4y + 4$$

Mithin $y^3 + y + 2 = 32$

$$y^3 + y = 30$$

Nun werden die Schranken vor y also gefunden:

1.) $y^3 + y = 30$

$$y^3 < 30$$
$$y < \sqrt[3]{30}$$

2.) $y^3 + y = 30$

$$y^2 < \sqrt[3]{900}$$
$$y^3 + y < y\sqrt[3]{900} + y$$
$$30 < y\sqrt[3]{900} + y$$
$$y\sqrt[3]{900} + y > 30$$
$$(\sqrt[3]{900} + 1)y > 30$$
$$y > \frac{30}{\sqrt[3]{900} + 1}$$

Nun aber ist $x = y + 1$.

$$\text{folgl. } x < 1 + \sqrt[3]{30}$$
$$x > 1 + \frac{30}{\sqrt[3]{900} + 1}$$

*) §. 193.

Wenn man die Formuln der cubischen Gleichungen betrachtet, wie solche aus der Multiplication einer einfachen Gleichung mit einer Gleichung zweyten Grades entstehen; so lassen sich nach den verschiedenen hier vorkommenden Fällen

verschiedene Vortheile zur Auflösung daraus herleiten.

Man nehme zuerst die drey Fälle vor sich:

1.) $(x-a)(x^2+b)=0$

2.) $(x+a)(x^2-b)=0$

3.) $(x-a)(x^2-b)=0$.

I. Aus $(x-a)(x^2+b)=0$ entstehet die cubische Gleichung

$$x^3-ax^2+bx-ab=0.$$

Hier wechslen die Zeichen ab, und der erste Faktor des Produkts des lezten Gliedes stehet bey x^2 und der andere bey x; und Faktoren der Gleichung sind $x-a$ und x^2+b. Wenn also der Fall ist:

$x^3-5x^2+3x-15$ (weil $15=5.3$ und 5 bey x^2 und 3 bey x stehet)

so sind beyde Faktoren $x-5$ und x^2+3; also $x=5$.

Und wenn $x^3-3x^2+5x-15$ so sind die Faktoren $x-3$ und x^2+5. Also $x=3$.

*) $x^3-9x^2+6x-54=0$

$(x-9)(x^2+6)=0$

$x=9$

*) $x^3-6x^2+9x-54=0$

$(x-6)(x^2+9)=0$

$x=6$

*) $x^3-17x^2+5x-85=0$

$(x-17)(x^2+5)=0$

$x=17$.

*) $x^2-5x^2+17x-85=0$

$(x-5)(x^2+17)=0$

$x=5$.

II.) Aus $(x+a)(x^2-b)=0$ entstehet die cubische Gleichung:

$$x^3+ax^2-bx-ab=0.$$

Man

Man hat also die Regel: Wenn in einer cubischen Gleichung die beyden vorderen Glieder das Zeichen + und die beyden hinderen das Zeichen — haben, und das Produkt der bekannten Zahlen in den zwey mittleren Gliedern das lezte Glied ausmacht, so ist der eine Faktor $x + a$ und der andere $x^2 - b$.

Z. B. In $x^3 + 9x^2 - 7x - 63 = 0$ ist der eine Faktor $x + 9$ und der andere $x^2 - 7$, denn $9 \cdot 7 = 63$.

Und x selbst wird durch eine leichte Extraktion gefunden.

*) $x^3 + 9x^2 - 7x - 63 = 0$
$(x + 9)(x^2 - 7) = 0$
$x^2 = 7$
$x = \sqrt{7}$

*) $x^3 + 7x^2 - 9x - 63 = 0$
$(x + 7)(x^2 - 9) = 0$
$x^2 = 9$
$x = \sqrt{9} = 3$

*) $x^3 + 5x^2 - 16x - 80 = 0$
$(x + 5)(x^2 - 16) = 0$
$x^2 = 16$
$x = 4$

*) $x^3 + 8x^2 - 49x - 392 = 0$
$(x + 8)(x^2 - 49) = 0$
$x^2 = 49$
$x = \sqrt{49} = 7$.

III. Aus $(x - a)(x^2 - b) = 0$ entstehet die Gleichung

$$x^3 - ax^2 - bx + ab = 0$$

hier haben beyde mittlere Glieder das Zeichen —.

Wenn also $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0$, so sind (weil $36 = 9 \cdot 4$) die beyde Faktoren $x - 4$ und $x - 9$.

*) $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0$

$(x - 4)(x^2 - 9) = 0$

$x^2 = 9$

$x = \sqrt{9} = 3$

oder $x = 4$

*) $x^3 - 9x^2 - 4x + 36 = 0$

$(x - 9)(x^2 - 4) = 0$

$x = 9$

oder $x^2 = 4$

$x = \sqrt{4} = 2$

*) $x^3 - 25x^2 - 49x + 1225 = 0$

weil $25 \cdot 49 = 1225$, so ist

$(x - 25)(x^2 - 49) = 0$

$x = 25$

oder $x^2 = \sqrt{49}$

$x = 7.$

*) $x^3 - 49x^2 - 25x + 1225 = 0$

$(x - 49)(x^2 - 25) = 0$

$x = 49$

oder $x^2 = 25$

$x = 5$

*) $x^3 - 21x^2 - \frac{4x}{9} + \frac{84}{9} = 0$

weil $21 \cdot \frac{4}{9} = \frac{84}{9}$ so ist

$(x - 21)(x^2 - \frac{4}{9}) = 0$

$x = 21$

oder $x^2 = \frac{4}{9}$

$x = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

*) $x^3 - \frac{4x^2}{9} - 21x + \frac{84}{9} = 0$

$(x - \frac{4}{9})(x^2 - 21) = 0$

$x = \frac{4}{9}$

oder $x = \sqrt{21}.$

Ferner: Man multiplicire $(x-a)(x^2+bx+b)$ so kommt die Gleichung

$$x^3+bx^2+bx-ax^2-abx-ab=0$$
$$\text{oder } x^3-(a-b)x^2-(ab-b)x-ab=0$$

hier haben die drey lezten Glieder das Zeichen —, und die bekannte Zahl des ersten der drey lezten Glieder ist gleich der Differenz der beyden Faktoren im lezten Gliede; und die bekannte Zahl des anderen der drey lezten Glieder ist gleich dem lezten Gliede, weniger dem kleineren Faktor; und die Faktoren der Gleichung selbst sind $x-a$ und x^2+bx+b; daher sind in $x^3-6x^2-24x-27=0$ (weil $27=9.3$ und $6=9-3$ und $24=27-3$) die beyden Faktoren $x-9$ und x^2+3x+3

*) $x^3-5x^2-12x-14=0$
weil $14=7.2$; und $5=7-2$; und
$12=14-2$; so ist
$(x-7)(x^2+2x+2)=0$
$x=7$

*) $x^3-7x^2-40x-44=0$
weil $44=11.4$; und $7=11-4$; und
$40=44-4$; so ist
$(x-11)(x^2+4x+4)=0$
$x=11$

*) $x^3-8x^2-60x-65=0$
weil $65=13.5$; und $8=13-5$; und
$60=65-5$; so ist
$(x-13)(x^2+5x+5)=0$
$x=13.$

Ferner: Eine cubische Gleichung entstehet auch aus der Multiplication dreyer einfachen Gleichungen. Z. B. aus

(x+

$(x+a)(x+b)(x-c)=0$ entstehet

$x^3+ax^2+bx^2+abx-cx^2-acx-$

$-bcx-abc$

oder $x^3-(c-a-b)x^2-(ac+bc-ab)x-$

$-abc=0$

Wenn $a=3$; $b=2$; $c=7$, so ist die cubische Zahl $=x^3-2x^2-29x-42$, und wenn

$x^3-2x^2-29x-42=0$; so ist

$(x+3)(x+2)(x-7)=0$

$x-7=0$

$x=7$

*) $x^3-x^2-70x-200=0$

weil $abc=200=4.5.10$; und $c-a-b=1$, und $ac+bc-ab=70$ so ist

$(x+4)(x+5)(x-10)=0$

$x=10$

*) $x^3-7x^2-218x-840=0$

weil $abc=840=6.7.20$, so ist $a=6$; $b=7$; $c=20$; ferner

$c-a-b=7$; und

$ac+bc-ab=218$; folglich

$(x+6)(x+7)(x-20)=0$

$x=20$

Nach eben dieser Art lässet sich auch x finden, wenn andere Faktoren zum Grunde liegen; als $(x+a)(x-b)(x-c)$ oder $(x-a)(x-b)(x-c)$ u. s. w. da aber das Verfahren etwas weitläufiger wird, so muß es hier übergangen werden.

Das vierte Kapitel.

Von Auflösungen der Gleichungen vierten Grades.

Eigenschaften der Gleichungen vierten Grades.

§. 194.

Aus der Zusammensetzung der Gleichungen erhellet, daß die Gleichungen vierten Grades entstehen können:

1.) Aus 4 Aequationen ersten Grades.
2.) Aus 2 Aequationen zweyten Grades.
3.) Aus einer ersten, und einer dritten Grades.

Daher können bey Gleichungen vierten Grades
entweder alle Wurzeln real seyn, wie sie nemlich die 4 einfache zusammensetzende haben:
oder zwey real und zwey imaginäre, wie sie die zusammensetzende Gleichung dritten oder zweyten Grades hat:
oder endlich alle imaginär, wie sie nemlich die 2 zusammensetzende 2ten Grades haben können.

Zusatz 1. Wenn das zweyte Glied fehlt, und das dritte positiv ist, so müssen nothwendig imaginäre Wurzeln vorhanden seyn. Denn wenn das zweyte Glied fehlt, so werden entweder 3 positive Wurzeln,

a, b, c, zugleich einer negativen −d gleich seyn; oder 3 negative −a, −b, −c, einer positiven d; oder endlich 2 negative −a, −b, zwey positiven zugleich, c, d. In beyden ersten Fällen wird der Coefficient des 3ten Gliedes $= ab + ac + bc - ad - bd - cd$; nun ist aber wegen dem fehlenden 2ten Glied $a + b + c = d$, und daher $ad > ab$, $cd > ac$, $bd > bc$: also ist das 3te Glied negativ, wenn alle Wurzeln real sind. Im dritten Fall ist der Coefficient des 3ten Gliedes $ab - ac - bc - ad - bd + cd$; nun aber ist wegen dem fehlenden 2ten Glied $a + b = c + d$. Es werde also $m = a + b = c + d$, so ist

$$m^2 = (a + b).(c + d) = ac + ad + bc + bd;$$

und

$$m^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \text{ und auch}$$
$$m^2 = (c + d)^2 = c^2 + 2cd + d^2; \text{ daher}$$
$$ab = \frac{m^2 - a^2 - b^2}{2} \text{ und}$$
$$cd = \frac{m^2 - c^2 - d^2}{2}; \text{ folglich}$$
$$ab + cd = m^2 \frac{- a^2 - b^2 - c^2 - d^2}{2} \text{ daher}$$
$$m^2 > ab + cd, \text{ oder}$$
$$ac + ad + bc + bd > ab + cd.$$

Daher, wenn alle Wurzeln real sind, so muß das dritte Glied negativ seyn; wenn es also positiv ist, so können nicht alle real seyn, sondern es müssen einige imaginär seyn.

Zusatz 2. Wenn das lezte Glied negativ ist, so können nicht alle Wurzeln imaginär seyn. Denn wenn alle Wurzeln imaginär wären, so würde die Gleichung aus zwey Gleichungen zweyten Grades zusammengesezt: da nun Aequationen zweyten Grades,

welche

welche imaginäre Wurzeln haben, das lezte Glied positiv haben müssen, (§. 165. Zus. 5.) so würden solche 2 Aequationen nothwendig in der zusammengesetzten Gleichung 4ten Grades das lezte Glied positiv hervorbringen.

Zusatz 3. Es kann demnach vermittelst obiger Zusätze erkannt werden, ob eine Gleichung vierten Grades imaginäre Wurzeln, und ob sie alle von dieser Art habe.

Zusatz 4. Wenn bey Gleichungen vierten Grades das lezte Glied mangelt, so können sie deprimirt werden durch $x = o$. Wenn sie allein das erste und lezte Glied haben, und von der Form sind $x^4 + r = o$, so werden sie durch eine zweyfache Ausziehung der Quadratwurzel aufgelöst; denn $x^4 = -r$, $x^2 = \pm\sqrt{-r}$ und $x = \pm\sqrt{\pm\sqrt{-r}}$. Endlich, wenn ihnen das 2te und 4te Glied zugleich manglen, und sie sind von der Form $x^4 + qx^2 + r = o$, so werden sie wie Gleichungen des 2ten Grades aufgelöst.

Zusatz 5. Es sind also nur noch solche Aequationen 4ten Grades übrig, denen entweder keines oder nur das 2te Glied fehlet. Wenn das zweyte Glied da ist, so ist es am bequemsten, nachdem man es weggehoben hat, Gleichungen dieser Art anzusehen, als zusammengesezt aus zweyen vom zweyten Grad, deren Coefficienten determinirt werden durch Hülfe von Aequationen, welche niedriger als der 4te Grad sind; wie in der nächsten Aufgabe gezeigt wird.

§. 195.

Bey einer Gleichung vierten Grades ihre hergeleitete cubische, wie auch zwey sie zusammensezende Gleichungen zweyten Grades zu finden.

Auf-

Auflösung. Nachdem das 2te Glied weggehoben worden, so werden die Gleichungen 4ten Grades auf diese Form gebracht:

$$x^4 + px^2 + qx + r = o$$

von welcher man sich vorstellen kann, als sey sie aus 2 Gleichungen zweyten Grades zusammengesezt worden, in denen die Coefficienten des zweyten Gliedes die nemliche sind, aber mit entgegengesezten Zeichen: denn da in der angenommenen Formul das 2te Glied fehlt, so wird die Summe der Wurzeln desselben $= o$. Nun aber enthalten die Coefficienten der 2ten Glieder in den zusammensetzenden Gleichungen die Summe von beyden. (§. 99.) Also, da diese Summen sich aufheben sollen, so müssen diese Coefficienten gleich seyn, und entgegengesezte Zeichen haben.

Man nehme also als zusammensetzende Gleichungen folgende beyde: $x^2 + ux + m = o$. und $x^2 - ux + n = o$, worinnen nun die Werthe u, m, n zu bestimmen sind, daß sie die gegebene besondere Gleichung hervorbringen. Ferner formire man durch Multiplication derselben mit sich folgende Gleichung:

$$\left.\begin{matrix} x^4 - u^2 \\ + m \\ + n \end{matrix}\right\} x^2 \left.\begin{matrix} - mu \\ + nu \end{matrix}\right\} x + mn = o.$$

vergleichet man diese mit der angenommenen allgemeinen Formul, so kommt:

1.) $-u^2 + m + n = p.$
2.) $-mu + nu = q.$
3.) $mn = r.$

vermittelst welcher Gleichungen m und n weggeschafft werden, und eine Gleichung durch u erhalten wird. Man multiplicire zu dem Ende die erste Gleichung in u, und addire sie zur 2ten, so kommt

2nu

$$2nu - u^3 = pu + q$$

$$n = \frac{q + pu + u^3}{2u}$$

dieses in der 3ten Gleichung subſtituirt, kommt

$$m = \frac{2ru}{u^3 + pu + q}$$

Werden nun die gefundene Werthe m und n in der 2ten ſubſtituirt, ſo kommt

$$\frac{u^3 + pu + q}{2} - \frac{2ru^2}{u^3 + pu + q} = q, \text{ und daher}$$

$$u^6 + 2pu^4 + p^2u^2 - 4ru^2 - q^2 = 0;$$

wird nun $u^2 = y$, ſo kommt die Gleichung auf den 3ten Grad

$$y^3 - 2py^2 + p^2y - 4ry - q^2 = 0$$

welche man deßwegen die Hergeleitete (*derivata Cubica*) nennet, von deren Auflöſung die Auflöſung der Gleichung 4ten Grades abhangt, von deren ſie hergeleitet worden.

Wenn nun aus der gefundenen hergeleiteten cubiſchen Gleichung der Werth u herausgebracht wird, und zugleich mit den gefundenen Werthen m und n in jenen beyden zuſammenſetzenden Gleichungen zweyten Grades, welche wir unten Subſidiar-Gleichungen nennen wollen, ſubſtituirt wird, ſo hat man beſondere Subſidiar-Gleichungen aus denen die gegebene beſondere Gleichung zuſammengeſezt iſt.

§. 196.

Zuſatz 1. Wenn die gegebene Gleichung vierten Grades genau in 2 ſubſidiare, die keine Irrationalität haben, dividirt werden kann, ſo muß man von u wenigſtens 2 rationale Werthe bekommen, und daher

muß u^2 eine rationale Grösse seyn, und also muß $y = u^2$ wenigstens einen rationalen Werth haben, und zwar einen quadratischen; dieser muß unter den Divisoren des lezten Gliedes der hergeleiteten cubischen Gleichung q^2 enthalten seyn, und daher muß der rationale Werth von u nothwendig unter den Divisoren der Grösse q stecken, und wenn keiner davon, ins Quadrat erhoben, eine rationale Wurzel der hergeleiteten cubischen Gleichung gibt, so ist dieses ein Anzeigen, daß die gegebene Gleichung 4ten Grades nicht in 2 Gleichungen zweyten Grades, die ohne Irrationalität wären, dividirt werden könne.

Zusatz 2. Hieher gehören auch alle Aequationen dieser Form: $x^{4m} + px^{3m} + qx^{2m} + rx^m + t = o$. Denn, was auch der Werth von m seyn mag, so werden sie alle, wenn man $x^m = y$ setzet, verwandelt in $y^4 + py^3 + qy^2 + ry + t = o$: wo man das 2te Glied sodann wegheben kann. Daher werden solcherley Gleichungen eben so aufgelöst, wie Gleichungen 4ten Grades.

Zusatz 3. Wenn in jenen Subsidiar-Gleichungen allein oben gefundene Werthe m und n substituirt werden, so verwandlen sie sich in folgende:

$$x^2 + ux + \frac{2r}{u^2 + p + \frac{q}{u}} = o, \text{ und}$$

$$x^2 - ux + \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{2}p + \frac{q}{2u} = o,$$

deren Wurzeln sind

$$x = -\tfrac{1}{2}u \pm \sqrt{\left(\frac{-2r}{u^2 + p + \frac{q}{u}} + \tfrac{1}{4}u^2\right)} \text{ und}$$

$$x =$$

$$x = \tfrac{1}{2}u + (\surd - \tfrac{1}{4}u^2 - \tfrac{1}{2}p - \frac{q}{2u})$$

wenn man demnach den Werth u aus der hergeleiteten cubischen Gleichung findet, und hier substituiret, so ergeben sich die 4 Werthe der gegebenen Gleichung.

Zusatz 4. Daher möchte aber ein Anfänger vermuthen, es können nicht alle Wurzeln der gegebenen Gleichung in einer einzigen Formul angegeben werden; allein da x eine Quadratwurzel ist, welche aus einer Aequation, die immer eine gerade Dimension hat, entspringet, so hat x nothwendig in allen jenen einzelnen Ausdrücken 2 Werthe, und daher kann jeder dieser Ausdrücke 4 Wurzeln bezeichnen, und solchergestalt kann man schreiben:

$$x = \mp\tfrac{1}{2}u \pm \surd(\tfrac{1}{4}u^2 - \frac{-2r}{u^2 + p \pm \frac{q}{u}})$$

$$x = \pm\tfrac{1}{2}u \pm \surd(-\tfrac{1}{4}u^2 - \tfrac{1}{2}p \mp \frac{q}{2u})$$

Es wird sich zeigen, daß diese beyde Ausdrücke gänzlich einerley seyen, wenn man den gefundenen Werth u in ihnen substituiret.

Zusatz 5. Und da der 2te Ausdruck einfacher ist, so kann man diesen wählen, die 4 Wurzeln der gegebenen Gleichung zu bezeichnen. Es sind aber die 4 allgemeinen Werthe von x, welche jener Ausdruck zugleich enthält, folgende:

$$x = \tfrac{1}{2}u + \surd(-\tfrac{1}{4}u^2 - \tfrac{1}{2}p - \frac{q}{2u})$$

$$x = \tfrac{1}{2}u - \surd(-\tfrac{1}{4}u^2 - \tfrac{1}{2}p - \frac{q}{2u})$$

$$x = -\tfrac{1}{2}u + \sqrt{(-\tfrac{1}{4}u^2 - \tfrac{1}{2}p + \frac{q}{2u})}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}u - \sqrt{(-\tfrac{1}{4}u^2 - \tfrac{1}{2}p + \frac{q}{2u})}.$$

Zusatz 6. Weil aber aus der hergeleiteten cubischen Gleichung mehrere Werthe von u können herausgebracht werden, so möchte man zweifeln, ob ein jeder derselben in diesen 4 Formuln substituirt werden könne, und immer dieselben Werthe der Wurzeln x herauskommen. Daß sie aber kommen, erhellet aus folgendem. Welchen Werth u man auch in der zweyten Formul des Zusatzes 4., welche die obige 4 zugleich enthält, substituiret, so können die 4 Werthe x, die durch sie gegeben werden, allemal vorgestellt werden durch $a+b$, $a-b$, $-a+b$, $-a-c$, oder die 4 Wurzeln der Gleichung $x^4+px^2+qx+r=0$ können angegeben werden durch $x-a-b$, $x-a+b$, $x+a-b$, $x+a+c$. Wo a den Theil der Wurzeln $\frac{1}{2}u$ anzeigt; b den Theil $\sqrt{(-\frac{1}{4}u^2-\frac{1}{2}p-\frac{q}{2u})}$; c den Theil $\sqrt{(-\frac{1}{4}u^2-\frac{1}{2}p+\frac{q}{2u})}$: Man erhält demnach durch Multiplication dieser 4 Wurzeln in sich, die Gleichung:

$$\left.\begin{matrix} x^4 - 2a^2 \\ -b^2 \\ -c^2 \end{matrix}\right\} x^2 \left\{\begin{matrix} -2ab^2 \\ +2ac^2 \end{matrix}\right\} x \left.\begin{matrix} +a^4 \\ -a^2b^2 \\ -a^2c^2 \\ +b^2c^2 \end{matrix}\right\} = 0.$$

Und dieses mit der allgemeinen Gleichung $x^4+px^2+qx+r=0$ verglichen, gibt $p=-2a^2-b^2-c^2$, $q=-2ab^2+2ac^2$, $r=a^4-a^2b^2-a^2c^2+b^2c^2$, und diese Werthe

in

in der hergeleiteten cubischen Gleichung (§. 195.) substituirt, kommt

$$\left.\begin{array}{l} u^6 - 4a^2 \\ \quad - 2b^2 \\ \quad - 2c^2 \end{array}\right\} u^4 \left\{\begin{array}{l} + 8a^2c^2 \\ + b^4 \\ - 2b^2c^2 \\ + c^4 \end{array}\right. \left.\begin{array}{l} - 4a^2b^4 \\ \\ - 4a^2c^4 \end{array}\right\} u^2 + 8a^2b^2c^2 \Big\} = 0.$$

deren Wurzeln sind $u = \pm 2a, \pm b \pm c, \pm b \mp c$. Substituirt man nun eine jede, samt den Werthen p und q in jenen 4 Formuln (§. 183. Zus.), so werden immer eben dieselbe Werthe x, nemlich $a + b$, $a - b$, $-a + c$, $-a - c$ herausgebracht werden. Es erhellet also, daß jede von den Wurzeln einer hergeleiteten cubischen Gleichung durch Substitution von ihr allemal eben dieselbe Wurzeln der gegebenen Gleichung gebe.

Zusatz 7. Aus diesem ist wieder klar, daß die Wurzeln einer Gleichung vierten Grades entweder alle real seyen, oder alle imaginär; oder 2 real und 2 imaginär; denn da alle 4 durch eine einzige Formul (Zus. 4.) ausgedrückt werden können, so können keine andere Combinationen derselben je geschehen.

Zusatz 8. Und so oft 2 reale und 2 imaginäre Wurzeln da sind, so kann die hergeleitete cubische Gleichung allemal durch Cardans Formuln (§. 187.) aufgelöst werden; und daher kann auch die Gleichung aufgelöst werden, davon jene hergeleitet ist. Wenn aber die Wurzeln entweder alle real, oder alle imaginär sind, so kann die hergeleitete cubische Gleichung solchergestalt nicht aufgelöst werden. Die Ursache von beyden ist, weil die allgemeine hergeleitete cubische Gleichung (§. 195.) aus diesen 3en zusam-

mengesezt wird: $u^2 - 4a^2$, $u^2 - b - 2bc - c^2$, $u^2 - b^2 + 2bc - c^2$; nun aber wenn von 2 Grösen b und c nur eine imaginär ist, so sind die 2 lezere Wurzeln oder zusammensetzende Gleichungen imaginär: also kann diese cubische Gleichung durch die Formuln des Cardans aufgelöst werden. (§. 187. Zus. 3.) Wenn aber beyde Grössen b und c real sind, oder beyde imaginär, so werden die ersteren 3 Wurzeln alle real seyn, und daher involvirt die hergeleitete cubische Gleichung einen irreduciblen Fall. (§. 187. Zus. 5.)

§. 197.

Gleichungen vierten Grades durch Hülfe der hergeleiteten cubischen, und 2 subsidiarer 2ten Grades aufzulösen.

Auflösung. Man vergleiche die gegebene Gleichung, nachdem man das 2te Glied weggehoben hat, mit der allgemeinen Formul $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, und suche die Werthe der Grössen p, q, r, diese substituire man in der hergeleiteten allgemeinen cubischen Gleichung (§. 195.), so erhält man eine besondere, deren Auflösung den Werth der Grösse u gibt, welcher Werth zugleich mit den gefundenen p, q, r, in den allgemeinen subsidiaren Gleichungen substituirt wird; (§. 196. Zus. 3.) daher erhält man 2 Gleichungen 2ten Grades, welche die gegebene zusammensetzen, deren Wurzeln also die Wurzeln der gegebenen Gleichung geben. (§. 98. Zus. 4.)

Zusatz. Wenn man die gefundene Werthe u, p, q, unmittelbar in den 4 allgemeinen Formuln der Wurzeln (§. 196. Zus. 5.) substituirt, so erhält man unmittelbar 4 Wurzeln der gegebenen Gleichung.

§. 198.

Beyspiele.

I.) Es sey

$$x^4 - 17x^2 - 20x - 6 = 0.$$

so ist $p = -17$, $q = -20$, $r = -6$. Welche Werthe in der derivirten allgemeinen cubischen Gleichung $u^6 + 2pu^4 + p^2u^2 - 4ru^2 - q^2 = 0$ substituirt, kommt $u^6 - 34u^4 + 313u^2 - 400 = 0$, welche Gleichung entweder auf cubische Form (§. 195.) reducirt und also aufgelöst werden kann; oder es kann auch ihre Auflösung unmittelbar versucht werden (§. 196. Zus. 1.) und zwar kommt 4 unter den Divisoren der Grösse q vor, dessen Quadrat 16 so beschaffen ist, daß die Gleichung genau dividirt werden kann durch $u^2 - 16$: daher $u^2 = 16$, $u = 4$; wenn also die gefundenen Werthe u, p, q, r, in den allgemeinen Subsidiar Gleichungen $x^2 + ux + \frac{2r}{n^2 + p + \frac{q}{n}} = 0$,

und $x^2 - ux + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2u} = 0$ substituirt werden, so erhält man die besondere (speciale) Subsidiar Gleichungen, welche die gegebene Gleichung zusammensetzen, $x^2 + 4x + 2 = 0$, und $x^2 - 4x - 3 = 0$; deren Wurzeln $-2 \pm \sqrt{2}$, und $2 \pm \sqrt{7}$ die Wurzeln der gegebenen Gleichung geben. Eben diese Wurzeln werden sich auch unmittelbar ergeben, wenn in den 4 Generalformuln der Wurzeln (§. 196. Zus. 5.) die Werthe u, p, q, unmittelbar substituirt werden.

II.) Es sey

$$x^4 - 12x^2 + 12x - 3 = 0.$$

so ist $p = -12$, $q = 12$, $r = -3$, und substituirt man diese Werthe in der hergeleiteten cubischen Gleichung, so kommt $u^6 - 24u^4 + 156u^2 - 144 = 0$; oder, indem man sezt $u^2 = y$, so wird $y^2 - 24y^2 + + 156y - 144 = 0$, welche Gleichung genau dividirt werden kann durch $y - 12$; daher $y = 12 = u^2$, also $u = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$: wenn also die Werthe u, p, q, r, in beyden Subsidiar-Gleichungen substituirt werden, so kommt $x^2 + 2x\sqrt{3} - \sqrt{3}$, und $x = = \pm\sqrt{(3 - \sqrt{3}) + \sqrt{3}}$; welches die Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. Eben diese Wurzeln ergeben sich unmittelbar, wenn in den Generalformuln der Wurzeln (§. 196. Zus. 5.) die Werthe u, p, q substituirt werden.

III.) Es sey

$$x^4 + x^2 + 2x + 6 = 0$$

so wird $p = 1$, $q = 2$, $r = 6$, diese substituire man in der hergeleiteten cubischen Gleichung, so kommt $u^6 + 2u^4 - 23u^2 - 4 = 0$. und nun setze man $u^2 = y$, so wird $y^3 + 2y^2 - 23y - 4 = 0$; und diese Gleichung kann dividirt werden durch $y - 4$, und es wird $y = 4 = u^2$ und daher $u = 2$; wenn also die gefundene Werthe u, p, q, r in den allgemeinen Subsidiar-Gleichungen substituirt werden, so werden $x^2 + 2x + 2$ und $x^2 - 2x + 3$ die Gleichungen seyn, welche die gegebene Gleichung zusammensetzen, deren Wurzeln $-1 \pm \sqrt{-1}$ und $1 \pm \sqrt{-2}$ die 4 Wurzeln der gegebenen Gleichung darstellen; welche auch unmittelbar kämen, wenn in den allgemeinen Formuln der Wurzeln (§. 196. Zus. 5.) die Werthe u, p, q, substituirt würden.

IV.) Es sey

$$x^4 + 70x^2 - 3744x + 27993 = 0$$

so

so wird $p=70$, $q=-3744$, $r=27993$; diese Werthe substituire man in der hergeleiteten cubischen Gleichung, so kommt $u^6+140u^4-107072u^2-14017536=0$. Oder wenn man sezt $u^2=y$, so wird $y^3+140y^2-107072y-14017536=0$. Unter den Divisoren des Werths q kommt nun 18, dessen Quadrat 324 diese cubische Aequation auflöst, welche durch $y-324$ divisibel ist: also $y=u^2=324$, und $u=18$: wenn also in den allgemeinen Subsidiar Gleichungen die gefundene Werthe u, p, q, r substituirt werden, so kommt $x^2+18x+301$ und $x^2-18x+93$, welche die gegebene Gleichung zusammensetzen, deren Wurzeln $-9\pm\sqrt{-220}$, und $9\pm\sqrt{-12}$ die Wurzeln der gegebenen Gleichung sind.

V.) Es sey

$$y^4+16y^3+99y^2+228y+144=0.$$

um das zweyte Glied wegzubringen, setze man $y=x-4$, so kommt nach geschehenen Substitutionen $x^4+3x^2-52x+48=0$, wo $p=3$, $q=-52$, $r=48$; und, diese Werthe substituirt, kommt die derivirte cubische Gleichung $u^6+6u^4-183u^2-2704=0$, und um diese in eine andere dritten Grades zu transformiren, darinnen das 2te Glied fehlt, werde $u^2=t-2$, so ist nach geschehenen Substitutionen $t^3-195t-2322=0$, deren Wurzeln aus Cardans Formul (§. 187.) ist $t=\sqrt[3]{(1161+\sqrt{1073296})}+\sqrt[3]{(1161-\sqrt{1073296})}=\sqrt[3]{(1161+1036)}+\sqrt[3]{(1161-1036)}=\sqrt[3]{2197}+\sqrt[3]{125}=18$: also $u^2=t-2=16$, und $u=4$. Wenn nun die gefundene Werthe u, p, q, r in den allgemeinen subsidiaren Gleichungen sub-

stituirt werden, so kommen $x^2+4x+16$, und x^2-4x+3, die Gleichungen, welche die transformirte zusammensetzen $x^4+3x^2-52x+48=0$; also ihre Wurzeln $-2\pm\sqrt{-12}$, und $2\pm\sqrt{(-3+}$ $+4)=2\pm1$. Diese Aufgabe hätte man auch auflösen können, wenn man die Divisoren von Einer Dimension gesucht hätte $y+1$, und $y+3$ (§. 124.) oder von zweyen Dimensionen y^2+4y+3, und $y^2+12y+48$ (§. 159.): auch hätte man eben den Werth u gefunden, wenn man den Divisor der derivirten cubischen Gleichung gesucht hätte, u^2-16. (§. 196. Zus. 1.)

VI.) Es sey

$$x^4-6x^2+8x-1=0$$

so wird $p=-6$, $q=8$, $r=-1$. Substituirt man diese Werthe, so ist ihre derivirte cubische Gleichung $u^6-12u^4+40u^2-64=0$. Um diese auf den 3ten Grad zu bringen, und das 2te Glied wegzuschaffen, setze man $u^2=y+4$, so ist nach geschehenen Substitutionen $y^3-8y-32=0$, woraus man vermittelst der Formul des Cardans erhält:

$$y=\sqrt[3]{(16+\sqrt{\frac{6400}{27}})}+\sqrt[3]{(16-\sqrt{\frac{6400}{27}})}$$

$$=\sqrt[3]{(16+\frac{80}{3\sqrt{3}})}+\sqrt[3]{(16-\frac{80}{3\sqrt{3}})}$$

$$=2\sqrt[3]{(\frac{6\sqrt{3}+10}{3\sqrt{3}})}+2\sqrt[3]{(\frac{6\sqrt{3}-10}{3\sqrt{3}})}:$$

es ist aber die Cubikwurzel aus $3\sqrt{3}=\sqrt{3}$, und aus $6\sqrt{3}+10=1+\sqrt{3}$, und aus $6\sqrt{3}-10=$ $=-1+\sqrt{3}$: also

$$y=\frac{2+2\sqrt{3}-2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=4.$$

Da

Da man nun gesezt hat $u^2 = y + 4$, so ist $u^2 = 8$, $u = \sqrt{8}$. Wenn nun in den Generalformuln der Wurzeln (§. 196. Zus. 5.) die gefundene Werthe u, p, q, substituirt werden, so erhält man folgende Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{(1 - \sqrt{2})}$$
$$x = \sqrt{2} - \sqrt{(1 - \sqrt{2})}$$
$$x = -\sqrt{2} + \sqrt{(1 + \sqrt{2})}$$
$$x = -\sqrt{2} - \sqrt{(1 + \sqrt{2})}$$

Man hätte auch u finden können, wenn man die derivirte cubische Gleichung durch $u - 8$ dividirt hätte; (§. 196. Zus. 1.) wir wollten aber zur Uebung lieber beyde leztere Beyspiele durch Anwendung der Regul des Cardans auflösen.

Anmerkung. Wenn der Werth u irrational und sehr verwickelt kommt, so kommen die Ausdrücke der Wurzeln der gegebenen Gleichung auch um so mehr verwickelt, so, daß die Aufgabe, zu deren Auflösung die gegebene Gleichung geordnet worden, mehr durch geometrische Construction zu berichtigen ist. Z. B. wenn die Gleichung gegeben ist:

$$x^4 - 6x^2 + 12x - 10 = 0,$$

so ist $p = -6$, $q = 12$, $r = -10$, und es kommt, diese Werthe substituirt, die hergeleitete cubische Gleichung $u^6 - 12u^4 + 76u^2 - 144 = 0$. oder wenn $u^2 = z$, so ist $z^3 - 12z^2 + 76z - 144 = 0$. Da diese Gleichung keinen rationalen Divisor zuläßt, so muß sie durch Cardans Formul aufgelöst werden. Damit man also das 2te Glied wegschaffe, so werde $z = y + 4$, so kommt nach geschehenen Substitutionen $y^3 + 28y + 32 = 0$,

und

und da wird durch Cardans Formul heraus-gebracht:

$$y = \sqrt[3]{(-16 + \sqrt{\frac{28864}{27}})} + \sqrt[3]{(-16 - \sqrt{\frac{28864}{27}})};$$

nun sezte man $z = y + 4$, so wird also

$$z = 4 + \sqrt[3]{(-16 + \sqrt{\frac{28864}{27}})} + \sqrt[3]{(-16 - \sqrt{\frac{28864}{27}})}:$$

und da $u^2 = z$, so ist

$$u = \sqrt{[4 + \sqrt[3]{(-16 + \sqrt{\frac{28864}{27}})} + \sqrt[3]{(-16 - \sqrt{\frac{28864}{27}})}]}$$

und substituirt man diesen Werth in jenen 4 Generalformuln der Wurzeln (§. 196. Zus. 5.), wer siehet nicht, daß sich unauswickelbare Formuln ergeben werden?

*) §. 199.

Nach den obigen Zerfällungsarten in Faktoren können nun auch biquadratische Gleichungen aufgelöset werden. So erhält man

aus den Faktoren	die Gleichungen
1.) $(x-a)(x^3+b)=0$	$x^4-ax^3+bx-ab=0$
2.) $(x+a)(x^3-b)=0$	$x^4+ax^3-bx-ab=0$
3.) $(x-a)(x^3-b)=0$	$x^4-ax^3-bx+ab=0$

Man siehet demnach:

1.) daß

1.) daß im ersten Falle die Zeichen abwechslen; im anderen nur die zwey hinderen Glieder, und im dritten nur die zwey mittleren Glieder das Zeichen — haben.

2.) Daß in allen 3 Fällen die bekannten Grössen der zwey mittleren Glieder aus der Grösse des lezten Gliedes entstehen: nemlich daß im anderen Gliede der erste Faktor, und im dritten Gliede der andere Faktor des lezten Gliedes vorkommt.

Beyspiele.

1.) $x^4 - 6x^3 + 8x - 48 = 0$

weil $6.8 = 48$, so ist

$(x - 6)(x^3 + 8) = 0$

$x - 6 = 0$

$x = 6$

2.) $x^4 + 12x^3 - 7x - 84 = 0$

weil $12.7 = 84$, so ist

$(x + 12)(x^3 - 7) = 0$

$x = \sqrt[3]{7}$

3.) $x^4 - 5x^3 - 3x + 15 = 0$

weil $5.3 = 15$, so ist

$(x - 5)(x^3 - 3) = 0$ folgl.

$x = 5.$ oder

$x = \sqrt[3]{3}$

4.) $x^4 - 10x^3 + 19x - 190 = 0$

weil $10.19 = 190$, so ist

$(x - 10)(x^3 + 19) = 0$

$x = 10$

5.) $x^4 +$

5.) $x^4+x^3-27x-27=0$

weil $1.27=27$, so ist

$(x+1)(x^3-27)=0$

$x=\sqrt[3]{27}$

$x=3$

6.) $x^4-11x^3-8x+88=0$

weil $11.8=88$, so ist

$(x-11)(x^3-8)=0$

$x=11$ oder

$x=\sqrt[3]{8}=2$

Wie aber eine biquadratische Gleichung auch aus 4 einfachen Gleichungen, als sovielen Faktoren, zusammengesezt werden kann, so kann man sich auch noch andere Zerfällungen gedenken, und vielerley in den besonderen Fällen anzuwendende Vortheile erhalten. Es kommt nemlich besonders darauf an, daß man die Faktoren zu finden wisse.

Z. B. Man soll in $a^2+c^2+2ac-b^2$ die Faktoren finden.

Es ist $a^2+2ac+c^2-b^2=(a+c)^2-b^2$

Nun sey $a+c=m$; so ist

$a^2+2ac+c^2-b^2=m^2-b^2$

$=(m+b)(m-b)$

und für m wieder substituirt $a+c$

$a^2+2ac+c^2-b^2=(a+b+c)(a+c-b)$

* Eben so ist auch

$a^2+4ac+4c^2-9b^2=(a+2c-3b)(a+2c-3b)$

und

$x^2+8x+16-25=(x+4+5)(x+4-5)$

Aufgabe.

Wenn man zu einer gewissen Zahl 12 addiret, die Summe mit eben dieser Zahl multipliciret, und zum

Pro:

Produkt 36 addiret, so kommt eben so viel heraus, als wenn man das Quadrat jener Zahl quadriret. Man soll die Zahl selbst finden.

Auflösung.

$$x^2 + 12x + 36 = x^2 x^2 = x^4$$
$$x^2 + 12x + 36 - x^4 = 0$$
$$(x+6)^2 - x^4 = 0$$
$$(x+6+x^2)(x+6-x^2) = 0$$
$$x+6-x^2 = 0$$
$$x = 3.$$

Das fünfte Kapitel.

Von verschiedenen Annäherungsarten zu den Wurzeln.

§. 200.

Da die Gleichungen dritten Grades, auf die, wie gezeigt worden, auch die Auflösungen der Gleichungen vierten Grades reducirt werden, keinen rationalen Divisor zulassen, wenn in ihnen die Grösse $\frac{1}{27}q^3$ negativ ist, oder grösser, als $\frac{1}{4}r^2$, so können genaue Werthe der realen Wurzeln, welche sodann die Gleichung hat, durch keine bisherige Methode bestimmt werden; nemlich um des imaginären willen, das sodann ihre Ausdrücke involviren: daher muß man zu Annäherungen seine Zuflucht nehmen, die man zwar eigentlich durch unendliche Reihen erhält; da aber diese Reihen in vielen Fällen sehr langsam convergiren, so wollen wir andere Annäherungsmethoden anführen.

§. 201.

§. 201.

Aufgabe.

Zu den Wurzeln einer irreduciblen Gleichung annähern.

Auflösung. Da dergleichen Fall nur alsdenn vorkommt, wenn der Coefficient des dritten Gliedes q negativ ist (§. 187. Zus. 2. 3.) so sey die allgemeine Gleichung

$$x^3 - qx + r = o$$

welche einen irreduciblen Fall involviret, und man setze $x = my$; so ist nach geschehener Substitution

$$y^3 - \frac{qy}{m^2} + \frac{r}{m^3} = o \text{ und}$$

$$y^3 - \frac{qy}{m^2} = -\frac{r}{m^3}$$

Man setze ferner die undeterminirte $m = -\sqrt{q}$, wenn r eine positive Grösse ist, oder $m = \sqrt{q}$, wenn r negativ ist. So wird $y^3 - y$ eine positive Grösse z. B. $= u$, und die Aequatiou hat die Form $y^3 - y = u$, oder $y^3 - y - u = o$. Wo $q = -1$, $r = -u$. Da nun im irreduciblen Fall $\frac{1}{4}r^2 < \frac{1}{27}q^3$, so muß hier seyn $\frac{1}{4}u^2 < \frac{1}{27}$, oder $u < \sqrt{\frac{4}{27}}$: Auch muß eine positive Wurzel grösser als eine Einheit seyn, aber kleiner als $\sqrt{\frac{4}{3}}$: denn wäre $y > \sqrt{\frac{4}{3}}$; so wäre demnach u, oder $y^3 - y > \sqrt{\frac{4}{27}}$, demnach wäre der Fall nicht irreducibel.

Wenn also $y = 1 + a$, und man substituirt diesen Werth in der Gleichung $y^3 - y = u$, so wird $2a + 3a^2 + a^3 = u$. Da nun a allemal kleiner als $\sqrt{\frac{4}{3}} - 1$, oder als 0,155; so wird der Cubus davon 0,0037 allemal klein; und, lässet man ihn also ausser Acht. Es wird nun aus voriger Gleichung folgende;

gende: $2a+3a^2=u$, und diese aufgelöst (§. 163.) kommt $a=\sqrt{(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}u)}-\frac{1}{3}$, oder, den Radicaltheil reducirt auf den Nenner $3=\sqrt{9}$, werde $a=$

$=\sqrt{\frac{(1+3u)}{3}}-\frac{1}{3}$, und daher $y=1+a=$

$=\frac{2+\sqrt{(1+3u)}}{3}$). Wenn also der gefundene Werth y mit m multiplicirt wird, so hat man den annähernden Werth zum gesuchten Werth x.

Zusatz. Will man etwa den Fehler wissen, der aus Weglassen des Cubus a^3 entspringt, so nehme man den Fall an, da dieser Cubus a^3 am allergrösten ist, nemlich, wo $1+a=\sqrt{\frac{4}{3}}$, welches, wie gesagt, sich in einem irreduciblen Fall nie ereignen kann: so ist alsdenn $u=y^3-y=(1+a)^3-(1+a)=$

$=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}-\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}-\frac{3}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{3}}$, also $y=\frac{2+\sqrt{(1+\frac{4}{3})}}{3}$ statt des wahren Werthes $\sqrt{\frac{4}{3}}$: welche 2 Grössen nicht von einander unterschieden sind, als ungefehr um $\frac{1}{1000}$; also ist in jedem irreduciblen Falle dieser Fehler noch geringer.

§. 202.

Beyspiele.

I. Man suchet die Wurzel der Gleichung

$$y^3-y=\frac{1}{3}$$

Man substituire $\frac{1}{3}$ statt u, so wird $y=\frac{2+\sqrt{(1+3u)}}{3}=$

$=\frac{2+\sqrt{(1+\frac{3}{3})}}{3}=\frac{2+\sqrt{2}}{3}=1,138$, welcher Werth den wahren Werth nicht um $\frac{1}{1000}$ übersteiget; denn,

sezte man $y = 1,137$, so wäre es weniger, als der wahre Werth, wie die Rechnung leicht zeigen würde.

II. Man suchet die Wurzel der Gleichung

$$x^3 - 13x + 5 = 0.$$

Weil der Werth $r = 5$ positiv ist, so setze man $m = -\sqrt{q} = -\sqrt{13}$, so wird $u = -\frac{r}{m^3} = \frac{-5}{-13\sqrt{13}} = \frac{5}{13\sqrt{13}}$ und $x = -y\sqrt{13}$. Daher die Gleichung $y^3 - y = u$, in folgende übergehet: $y^3 - y = \frac{5}{13\sqrt{13}}$. Daher in der Formul von y statt u gesezt $\frac{-5}{13\sqrt{13}}$, kommt

$$y = \frac{2 + \sqrt{(1 + \frac{15}{13\sqrt{13}})}}{3},$$

$$\text{also } x = -y\sqrt{13} = \frac{-2\sqrt{13} - \sqrt{13} + \frac{15}{\sqrt{13}}}{3} = -3,784 \text{ bey nahe.}$$

III. Man suchet die Wurzel der Gleichung

$$x^3 - 9x + 10 = 0.$$

So ist $m = -3$, also $x = -3y$; und diesen Werth substituirt, so wird aus der Gleichung $y^3 - y = u$ folgende: $y^3 - y = \frac{10}{27}$; also statt u gesezt $\frac{10}{27}$, kommt $y = \frac{2 + \sqrt{(1 + \frac{10}{9})}}{3}$, also

$$x = -3y = \frac{-6 - 3\sqrt{(1 + \frac{10}{9})}}{3} = -2 - \sqrt{\frac{19}{9}} =$$

$$= -2 - \tfrac{1}{3}\sqrt{19} = -3,455 \text{ beynahe.}$$

IV. Man

IV. Man suchet die Wurzel der Gleichung

$$x^3 - 12x - 12 = 0.$$

so ist $m = \sqrt{12}$, also $x = ym = y\sqrt{12}$, $u = -\frac{12}{12\sqrt{12}}$;

also $y = 2 + \sqrt{(1 + \frac{12}{4\sqrt{12}})}$, und daher

$$x = \frac{2\sqrt{12} + \sqrt{(12 + \frac{12^2}{4})}}{3} = \frac{2\sqrt{12} + \sqrt{15}}{3} =$$

$= 3,600$ bey nahe.

V. Man sucht die Wurzel der Gleichung

$$x^3 - 30x + 36 = 0$$

so ist $m = -\sqrt{30}$, $x = -y\sqrt{30}$, $u = \frac{36}{30\sqrt{30}}$, also

$y = \frac{2 + \sqrt{(1 + 3u)}}{3} = \frac{2 + \sqrt{(1 + \frac{108}{30\sqrt{30}})}}{3}$ und

demnach $x = \frac{-2\sqrt{30} - \sqrt{(30 + \frac{108}{\sqrt{30}})}}{3} = -6,0001$,

welche Wurzel von der wahren nicht mehr als $\frac{1}{1000}$ einer Einheit abweichet, da die wahre Wurzel ist $= -6$, wie es erhellet, wenn man substituirt.

§. 203.

Aufgabe.

Diesen Wurzeln auf eine andere Art anzunähern.

Auflösung. Es sey eine allgemeine Gleichung, welche eine irreducible involvirt

$$x^3 + qx + r = 0.$$

so ist $x^3 = -qx - r$, und durch x dividirt, $x^2 = -q - \frac{r}{x}$, also $x = \sqrt{(-q - \frac{r}{x})}$. Wenn hier statt x jede Zahl mit dem entgegengesezten Zeichen vom lezten Gliede der Gleichung r angenommen wird, so wird $\frac{r}{x}$ ein negativer Bruch, also $-\frac{r}{x}$ positiv; und weil im irreduciblen Fall die Grösse q negativ ist, (§. 187. Zus. 2. 3.) so ist $-q$ positiv, also wird auch die Grösse $-q-\frac{r}{x}$ positiv seyn. Ziehet man also die Wurzel aus $-q-\frac{r}{x}$, so hat man nun einen neuen Werth für x, welcher grösser ist, als der wahre Werth, wenn jener für x angenommene kleiner als der wahre war, und umgekehrt. Denn wenn der angenommene Werth x zu klein ist, so ist der Bruch $-\frac{r}{x}$, also auch die Grösse $-q-\frac{r}{x}$ zu groß, also auch ihre Wurzel zu groß, und umgekehrt. Ferner, dieser neue Werth x wird schon dem wahren näher seyn, da der Fehler in der Extraktion der Wurzel abnimmt: wenn daher dieser neue Werth in der Formul $x = \sqrt{(-q - \frac{r}{x})}$ statt x substituirt, und diese Operation so oft als beliebig wiederholt wird, so kann man dem Werth der Wurzel so nahe kommen, als man will.

Beyspiele.

I. Man suchet, wie oben, die Wurzel der Gleichung

$x^3 -$

$$x^3 - x - \tfrac{1}{3} = 0.$$

so ist $q = -1$, $r = -\frac{1}{3}$; man nehme statt x die Zahl 2, so wird $-\frac{r}{x} = \frac{1}{6}$, und daher $\sqrt{(-q - \frac{r}{x})} = \sqrt{(1 + \frac{1}{6})}$, oder wenn man den Bruch $\frac{1}{6}$ auf hundert Theile reducirt, durch die Proportion $6 : 1 = 100 : 16$, so wird $x = \sqrt{1,16} = 1,0$ bey nahe. Man setze abermal $x = 1,0$, so kommt $\sqrt{(-q - \frac{r}{x})} = \sqrt{(1 + \frac{1}{3})}$, oder den Bruch $\frac{1}{3}$ auf tausend Theile gebracht durch die Proportion: $3 : 1 = 1000000 : 333333$, so ist $x = \sqrt{1,333333} = 1,138$, aufs nächste, ganz wie oben im I. Beyspiel.

II. Man suchet, wie oben, die Wurzel der Gleichung

$$x^3 - 13x + 5 = 0.$$

so ist $q = -13$, $r = 5$. Man nehme statt x die negative Zahl -2, weil das lezte Glied r positiv ist, so kommt $-\frac{r}{x} = \frac{5}{2} = 2,50$, daher $\sqrt{(-q - \frac{r}{x})} = \sqrt{15,50} = 3,9$ aufs nächste. Nun setze man $x = -3,9$, so wird $\sqrt{(-q - \frac{r}{x})} = \sqrt{(13 + \frac{5}{3,9})} = \sqrt{(13 + 1,282051)} = \sqrt{14,282051} = 3,779$, so von der im obigen 2ten Beyspiel gefundenen Wurzel fast um 5 tausend Theile einer Einheit unterschieden ist.

III. Man suchet, wie oben, die Wurzel der Gleichung

$$x^3 - 9x + 10 = 0,$$

so ist $q = -9$, $r = 10$. Es werde $x = -2$, so ist $-\frac{r}{x} = \frac{10}{2} = 5$, daher $\sqrt{(-q - \frac{r}{x})} = \sqrt{(9+5)} = \sqrt{14} = 3,7$, aufs nächste. Man setze ferner $x = -3,7$, so wird $-\frac{r}{x} = \frac{10}{3,7} = 2,702$, also $\sqrt{(-q - \frac{r}{x})} = \sqrt{11,702} = -3,420$ aufs nächste, so von der in obigem Beyspiel 3 gefundenen Wurzel fast um 23 tausendtheile einer Einheit unterschieden ist. Setzet man $x = -1$, so ist $-\frac{r}{x} = 10$, also $\sqrt{(-q - \frac{r}{x})} = \sqrt{19} = -4,4$ aufs nächste.

Es sey abermal $x = -4,4$, so ist $-\frac{r}{x} = \frac{10}{4,4} = 2,27$, und daher $\sqrt{(-q - \frac{r}{x})} = \sqrt{11,27} = -3,35$. Es sey noch einmal $x = -3,35$, so wird $-\frac{r}{x} = 2,985$, also $\sqrt{(-q - \frac{r}{x})} = \sqrt{11,985} = -3,462$, so von der in obigem 3ten Beyspiel gefundenen Wurzel ungefähr um 9 tausendtheile einer Einheit unterschieden ist.

IV. Man suchet, wie oben, die Wurzel der Gleichung

$$x^3 - 30x + 36 = 0,$$

so ist $q = -30$, $r = 36$. Es sey $x = -5$, so ist $\sqrt{(-q - \frac{r}{x})} = \sqrt{(30 + \frac{36}{5})} = -6,099$. Abermal

mal sey $x = -6{,}099$, so wird $\sqrt{(-q - \frac{r}{x})} =$

$= \sqrt{(30 + \frac{36}{6{,}099}} = \sqrt{35{,}902607} = -5{,}9901$, so von der wahren Wurzel -6 um 9 tausendtheile einer Einheit unterschieden ist. Sezte man $x = -6$, so wäre $\sqrt{(-q - \frac{r}{x})} = \sqrt{(30 + \frac{36}{6})} = \sqrt{36} =$

$= -6$, wo alsbald klar wäre, daß man auf die genaue Wurzel -6 gekommen sey.

Anmerkung. Die durch solche Methoden gefundene Wurzel wird jedesmal die gröste seyn, da sie das dem lezten Glied der Gleichung entgegengesezte Zeichen hat. (§. 179. Zus. 3.) Ist aber eine von den Wurzeln gefunden, so werden die anderen leicht entdeckt. Denn es sey die gefundene Wurzel $= n$, so wird die Summe der übrigen $= -n$, indem bey dem fehlenden zweyten Glied die Summe aller seyn muß $= 0$. (§. 101. Zus. 6.) Und weil aller Produkt ist $= -r$, (§. 99.) so wird das Produkt der übrigen $= -\frac{r}{n}$: daher, weil in der Gleichung, so die beyden übrigen Wurzeln enthält, der Coefficient des zweyten Gliedes die Summe der Wurzeln mit dem entgegengesezten Zeichen seyn muß, und das lezte Glied das Produkt aus jenen 2 Wurzeln seyn muß, mit dem eigenen Zeichen (§. 99.), so wird jene Gleichung $x^2 + nx - \frac{r}{n} = 0$: daher sind die 2 übrigen Wurzeln $x = -\frac{1}{2}n \pm \sqrt{(\frac{1}{4}n^2 + \frac{r}{n})}$; es las-

sen sich also vermittelst dieser Formul jene 2 Wurzeln finden.

Da aber diese gegebene Annäherungsmethoden wegen Zunahm der Decimalstellen bey weiteren Annäherungen ziemlich beschwerlich werden, so wollen wir noch eine andere Art anführen, vermittelst deren man ziemlich schnell Wurzeln erhält, die den wahren am nächsten kommen.

§. 204.

Aufgabe.

Methode, sich den Wurzeln schneller zu nähern.

Auflösung. Nachdem man vermittelst der Gränzen, oder obiger Methoden, der Wurzel einer Gleichung so nahe gekommen ist, daß man von dem wahren Werth nicht um einen zehenden Theil einer Einheit verfehlet, oder um einen hunderten, indem die Glieder der Gleichung grosse Coefficienten haben, der gröste Werth aber $= a$, und der Bruch, um den dieser Werth vom wahren abweicht, $= y$ gesezt wird; so wird der wahre Werth $= a + y$, und y in Ansehung a eine ziemlich kleine Grösse. Wenn nun in der gegebenen Gleichung statt x, als der unbekannten Grösse, gesezt wird $a + y$, so wird sie in eine andere transformirt, welche man auf diese gedoppelte Weise auflösen kann:

1.) Man kann in ihr alle diejenigen Glieder weglassen, in denen y zu höheren Potenzen, als die erste ist, aufsteiget, da diese Glieder in Ansehung der übrigen sehr klein sind; und also wird die Gleichung auf den ersten Grad gebracht und der Werth y leicht gefunden werden,

den, welcher zum Werth a addirt den Werth der Wurzel x gibt, der dem wahren schon näher kommt. Diesen neuen Werth setze man abermal $= a$, und den Unterschied vom wahren Werth $= y$, und wiederhole die Berechnung so oft man will, so kann man auf diese Weise sich dem wahren Werth ins unendliche nähern.

2.) Wenn in der transformirten Gleichung auch diese Glieder gelassen werden, worinnen y^2 vorkommt, und die übrige höhere Potenzen dieses y wegbleiben, so erhält man eine Gleichung zweyten Grades, die sehr leicht aufzulösen ist, woraus der Werth y gefunden und zum Werth a addirt einen Werth der Wurzel gibt, so dem wahren weit näher kommt. Wie aus folgenden Beyspielen erhellen wird.

Zusatz. Damit aber die wiederholte Substitution der Grösse $a + y$ nicht beschwerlich falle, und zugleich auch die wiederholte Transformation der Gleichung; so setzen wir hier eine Formul bey, durch deren Hülfe sogleich erhellet, welche Glieder nach geschehener Substitution des Werths $a + y$ beyzubehalten seyen. Es sey jedes Glied der gegebenen Gleichung $= bx^m$, worinnen statt x der Werth $a + y$ substituirt werden solle; so ist nach der Generalformul des Binomiums das zu irgend einer Potenz zu eleviren ist,

$$bx^m = b(a+y)^m = ba^m + mba^{m-1}y + \frac{m.m-1}{1.2} ba^{m-2}y^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3.} ba^{m-3}y^3 \text{ ꝛc.}$$

von welcher Reihe nur beyde erste Glieder nach der ersten Methode beyzubehalten sind, oder die 3 erste nach der 2ten, wo nemlich auch Glieder, die die Potenz y^2 enthalten, beybehalten werden.

§. 205.

Beyspiele.

I. Es sey die Gleichung, wie vorhin,

$$x^3 - x - \tfrac{1}{3} = 0.$$

Sezt man nun $a + y$ statt x, so wird nach der ersten Methode

$$a^3 + 3a^2y = 0, \text{ demnach } y = \frac{a^3 - a - \frac{1}{3}}{-3a^2 + 1}.$$

$$-a-y$$
$$-\tfrac{1}{3}$$

Wir fanden aber oben die der wahren Wurzel am nächsten kommende $= 1,138$, daher, diesen Werth für a gesezt, ist

$$y = \frac{1,473760072 - 1,138 - 0,333333333}{-3,885132 + 1} =$$

$$= \frac{0,002426739}{-2,885132} = -0,000841:$$

daher $x = a + y = 1,138 - 0,000841 = 1,137159$.

Wollen wir nach der 2ten Methode auch diese Glieder beybehalten, worinnen y^2 ist, so setze man $a + y$ statt x, und es kommt:

$$a^3 + 3a^2y + 3ay^2 = 0, \text{ und demnach statt}$$

a substituirt 1,138,

$$-a-y$$
$$-\tfrac{1}{3}$$

so ist $0,002426739 + 2,885132y + 3,414y^2 = 0$;
demnach erhält man $y = -0,000841836$, also

x =

$x = a + y = 1,138 - 0,00084836 = 1,137158164$, welcher Werth viel näher ist, als der vorige.

II. Es sey die Gleichung

$$x^3 - 30x + 36 = 0,$$

man setze $a + y$ für x, so ist nach der ersten Methode

$$a^3 + 3a^2y = 0, \text{ und daher } y = \frac{a^3 - 30a + 36}{-3a^2 + 30}$$

$$-30a - 30y$$
$$+36$$

Man fand aber oben (§. 127.) daß die Wurzel dieser Gleichung um gar weniges kleiner sey als 4,5; daher, diesen Werth für a substituirt, kommt $y = \frac{-7,875}{-30,75} = 0,25$; folglich $x = a + y = 4,5 + 0,25 = 4,75$.

Es werde abermal $a = 4,75$, so wird $y = \frac{0,671875}{-37,6875} = -0,01782$, daher $x = a + y = 4,75 - 0,01782 = 4,73218$, u. s. w.

Will man nach der 2ten Methode auch diejenige Glieder beybehalten, worinnen y^2 vorkommt, so setze man $a + y$ statt x, und es kommt

$$a^3 + 3a^2y + 3ay^2 = 0, \text{ und also statt } a \text{ substituirt } 4,5,$$

$$-30a - 30y$$
$$+36$$

und es kommt $-7,875 + 30,75y + 13,5y^2 = 0$, daher erhält man $y = 0,232$; daher $x = a + y = 4,732$. Wird dieser Calcul nochmals angestellt, und $a = 4,732$ gesezt, so findet man $y = 0,00205081$, und daher $x = a + y = 4,73205081$, u. s. f.

III. Es

III. Es sey die Gleichung

$$x^3 - 2x^2 - 23x - 70 = 0$$

man setze $a + y$ für x, so ist nach der ersten Methode:

$$a^3 + 3a^2y = 0, \text{ und folgl.}$$

$$y = \frac{a^3 + 2a^2 - 23a - 70}{-3a^2 - 4a + 23}$$

$$+ 2a^2 + 4ay$$
$$- 23a - 23y$$
$$- 70$$

Es ist aber die wahre Wurzel kleiner in ganzen Zahlen als 5; diesen Werth statt a gesezt, kommt

$$y = \frac{125 + 50 - 115 - 70}{-75 - 20 + 23} = \frac{10}{72} = 0,1;$$

also $x = a + y = 5,1$.

Ferner den Werth der gefundenen Wurzel 5,1 statt a substituirt, kommt

$$y = \frac{132,651 + 52,02 - 117,3 - 70}{-78,03 - 20,4 + 23} =$$

$$= \frac{2,629}{75,430} = 0,0349;$$

daher $x = a + y = 5,1349$ u. s. f.

Will man nach der 2ten Methode, auch die Glieder, so y^2 enthalten, stehen lassen, und sezt $a + y$ statt x, so kommt

$$a^3 + 3a^2y + 3ay^2 = 0$$
$$+ 2a^2 + 4ay + 2y^2$$
$$- 23a - 23y$$
$$- 70.$$

Oder statt a gesezt 5, kommt $-10 + 72y +$ $+ 17y^2 = 0$, und daher $y = 0,13529411$, daher $x = a + y = 5,13529411$.

IV. Es sey die Gleichung

$$x^3 - 15x^2 + 63x - 50 = 0$$

so setze man $a + y$ statt x, so kommt nach der ersten Methode:

$$a^3 + 3a^2y = 0 \text{ und also}$$

$$y = \frac{a^3 - 15a^2 + 63a - 50}{-3a^2 + 30a - 63}$$

$$-15a^2 - 30ay$$
$$+63a + 63y$$
$$-50$$

Es ist aber die allernächst kleinere Wurzel der gegebenen Gleichung in ganzen Zahlen $= 1$; daher diesen Werth statt y substituirt, kommt $y = \frac{1}{36} = 0{,}027$, also $x = a + y = 1{,}027$. Will man auch die Glieder beybehalten, worinnen y^2 und y^3 vorkommen, so ist

$$a^3 + 3a^2y + 3ay^2 + y^3 = 0$$
$$-15a^2 - 30ay - 15y^2$$
$$+63a + 63y$$
$$-50$$

oder statt a gesezt 1, kommt

$$-1 + 36y - 12y^2 + y^3 = 0, \text{ und daher}$$

$$y = \frac{1}{36 - 12y + y^2}, \text{ und in dem Nenner für}$$

y den oben gefundenen Werth $\frac{1}{36}$ substituirt, so wird

$$y = \frac{1}{36 - 12 \cdot \frac{1}{36} + \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36}} = \frac{1296}{46225} = 0{,}02803,$$

folglich $x = a + y = 1{,}02803$, u. s. f.

Anmerkung. Diese leztere Methode der Annäherung gibt eine Generalformul an die Hand, welche zu einfacher Ausziehung der Wurzeln dienet. Denn es sey irgend eine Zahl N, daraus die Wurzel des Exponenten m extrahirt wer-

werden solle: man setze, die nächste Wurzel desselben sey durch die gewöhnliche Methode in ganzen Zahlen gefunden worden $= a$, die wahre Wurzel aber sey $= a + y$; so erhebe man diese Wurzel zur Potenz des Exponenten m, so kommt $a^m + ma^{m-1}y +$

$$+\frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}y^2 +$$

$$+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3.}a^{m-3}y^3 \text{ &c.} = N.$$ Und wegen den höheren Potenzen des Bruches y, die sehr klein sind, behalte man nur beyde erste Glieder, so ist $a^m + ma^{m-1}y = N$, und daher $y = \frac{N-a^m}{ma^{m-1}}$; behält man aber drey Glieder bey, so wird

$$y = \frac{N-a^m}{ma^{m-1} + \frac{m.m-1}{2}a^{m-2}y},$$

oder statt y gesezt $\frac{N-a^m}{ma^{m-1}}$, so wird

$$y = \frac{N-a^m}{ma^{m-1} + \frac{m^2-m}{2a}a^{m-1}.\left(\frac{N-a^n}{ma^{m-1}}\right)^2}$$

das ist

$$y = \frac{N-a^m}{ma^{m-1} + \frac{m-1}{2a}.(N-a^m)};$$

und Kürze halber gesezt $N - a^m = n$, und sowohl Nenner als Zähler mit a multiplicirt,

kommt $y = \frac{an}{ma^m + \frac{m-1}{2}.n}$

Das

Damit also nun der Gebrauch der gefundenen Formul in Extraktion der Wurzeln erhelle, so suche man z. B. die Cubikwurzel der Zahl 2; so wird $N=2$, $a=1$, $m=3$, $n=1$. Daher

$$y=\frac{an}{ma^m+\frac{m-1}{2}.n}=\frac{1}{4}=0,25,$$ und

also $a+y=1,25$. Man setze nun abermal $a=1,25$, so wird nach geschehenen Substitutionen $y=0,009921$, also $a+y+1,25+0,009921=1,25921$. Sezt man ferner $a=1,259921$, und substituirt, so kommt man auf einen viel näheren Werth; und man kann diese Operation so oft wiederholen, als man will, oder die Genauigkeit der Rechnung es erfordert. Und eben nach dieser Methode wird auch bey jeder anderer gegebener Zahl verfahren.

Vierter Abschnitt.

Von den Reihen.

Das erste Kapitel.

Von den Reihen überhaupt, und ihren verschiedenen Arten. Verwandlung der Brüche in unendliche Reihen. Summirung derselben.

§. 206.

Eine Reihe, Series, ist eine Anzahl mehrerer Stellen von Grössen, welche in beständiger nach gewissen Gesetzen eingerichteter Ordnung auf einander folgen.

Sie ist Endlich, wenn die Zahl der Stellen aufhörend; und Unendlich, wenn sie ins Unendliche fortsetzend angenommen wird.

Sie heißt Divergirend, wenn die Stellen immer wachsen; und Convergirend, wenn sie immer abnehmen.

Eine Reihe heißt eine HauptReihe, Series Primitiva, wenn sie unter dem Gesez ihrer Bildung betrachtet wird, wornach sie von anderen Reihen ganz unabhängig ist.

DifferenzenReihen, Series Differentiales, sind, welche herauskommen, wenn man die Differenzen einer Hauptreihe durch die nächsten Glieder derselben nimmt, und wieder die Differenzen der Differenzen

zen. ꝛc. Wornach man DifferenzenReihen der Ersten, Zweyten ꝛc. Ordnung erhält.

Summirende Reihen, Series Summatrices, heissen, welche hervorgebracht werden, wenn man die Summen der nächsten Glieder der Hauptreihe nimmt; ferner, die Summen dieser Summen ꝛc. wodurch man ebenfalls Summirende Reihen der Ersten, der Zweyten ꝛc. Ordnung erhält.

§. 207.

Ausser den schon oben betrachteten arithmetischen und geometrischen Progressionen kommen vornemlich folgende Geschlechter und Arten von Reihen in Betrachtung: welche wir hier zuerst nur überhaupt nennen, von den meisten derselben aber in den folgenden Kapiteln noch besonders handlen wollen.

§. 208.

Figurirte Zahlen.

Figurirte Zahlen sind

Beständige; Erster Ordnung
1; 1; 1; 1; 1; 1 ꝛc.

Natürliche; Zweyter Ordnung
1; 2; 3; 4; 5; 6; ꝛc.

Triangularzahlen; Dritter Ordnung
1; 3; 6; 10; 15; 21. ꝛc.

Pyramidalzahlen; Vierter Ordnung
1; 4; 10; 20; 35; 56. ꝛc.

Das Gesez der figurirten Zahlen ist, daß jedes Glied einer Reihe die Summe einer eben so grossen Anzahl von vorhergehenden Stellen der darüber stehenden Reihe einer niedrigeren Ordnung ist.

Z. B. Die 2te Reihe entstehet durch beständig fortdaurendes Addiren der Einheiten.

Die 3te, durch beständiges Addiren der vorausgehenden Glieder der 2ten Reihe.

Z. B. $10 = 1 + 2 + 3 + 4$.

Die 4te, durch fortgesetztes Addiren der 3ten Reihe.

Z. B. $20 = 1 + 3 + 6 + 10$

$56 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21$.

§. 209.

Polygonalzahlen.

Polygonalzahlen (welche ebenfalls zu den figurirten Zahlen gehören) entstehen aus der Summe der Stellen einer arithmetischen Progression, welche von 1. anfangt, und sie heissen:

Triangularzahlen, Quadrangular (Tetragonal), Pentagonal, Hexagonalzahlen 2c.

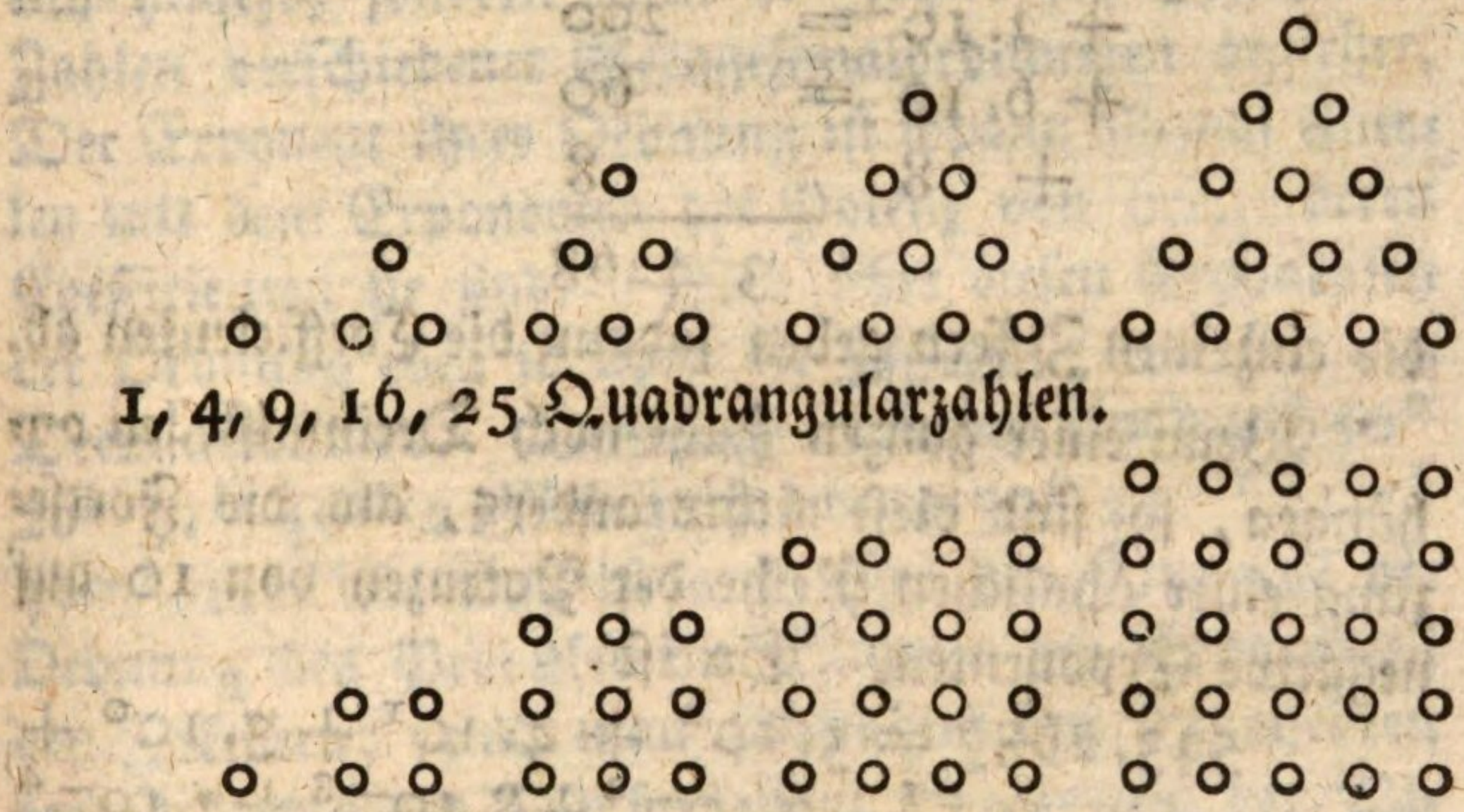
je nachdem die Differenz der arithmetischen Progression, aus der sie entstehen, 1, 2, 3, 4, 5, 6 2c. ist. Z. B.

Arithmetische Progressionen.		Polygonalzahlen.
1, 2, 3, 4, 5 2c.	Differ. 1. — —	1, 3, 6, 10, 15 2c. Triangularzahlen.
1, 3, 5, 7, 9 2c. . . .	2. — —	1, 4, 9, 16, 25 2c. Tetragonalzahlen.
1, 4, 7, 10, 13 2c. . . .	3. — —	1, 5, 12, 22, 35 2c. Pentagonalzahlen.
1, 5, 9, 13, 17 2c. . . .	4. — —	1, 6, 15, 28, 45 2c. Hexagonalzahlen.

Diese Polygonalzahlen haben ihren Namen von den regulären Figuren, in welche sich die Einheiten

ten solcher Zahlen, als so viele Punkten, ordentlich setzen lassen; wobey demnach in eine Seite solcher Figur so viele Punkten zu stehen kommen, als in derselben summirenden Progression Glieder sind. Man pflegt daher solche Seite die Wurzel der Polygonalzahl zu nennen.

Z. B. 1, 3, 6, 10, 15 Triangularzahlen.



1, 4, 9, 16, 25 Quadrangularzahlen.

§. 210.

Potenzenreihen.

Potenzenreihen sind, welche aus Quadraten, Cubis, ꝛc. der in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlen bestehen. Z. B.

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100ꝛc.
1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000ꝛc.
1, 16, 81, 272, 625, 1296, 2401, 4096, 6561, 10000ꝛc.

§. 211.

Decimalzahlen, Sexagesimalbrüche.

Die einzelnen Ziffern verschiedener Ordnungen, wodurch eine auf gewöhnliche Art geschriebene Zahl

ausgedrückt wird, sind als einfache Ziffern anzusehen, die in eine Potenz von 10 multiplicirt sind, deren Exponent mit dem Exponenten der Ordnung der Ziffer einerley ist. So ist z. B.

$$\begin{aligned} 374268 &= 3.10^5 = 300000 \\ &+ 7.10^4 = 70000 \\ &+ 4.10^3 = 4000 \\ &+ 2.10^2 = 200 \\ &+ 6.10 = 60 \\ &+ 8 = 8 \\ &\hline 374268 \end{aligned}$$

die einzelnen Ziffern geben sodann die Coefficienten ab.

Wenn einer ganzen Zahl noch Decimalstellen anhängen, so sind diese nichts anders, als die Fortsezung einer ähnlichen Reihe der Potenzen von 10 auf negative Exponenten. So ist

$$543,2687 = 5.10^2 + 4.10^1 + 3.10^0 + 2.10^{-1} + 6.10^{-2} + 8.10^{-3} + 7.10^{-4}$$

oder $= 500 + 40 + 3 + \frac{2}{10} + \frac{6}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{7}{10000}$

Die Rechnungsarten mit Decimalbrüchen werden in der gewöhnlichen Arithmetik gelehret.

So würde man Duodecimalbrüche erhalten, wenn man statt der Ziffer 10 die Ziffer 12 nehmen, und nach ihren Potenzen ordnen wollte: wo sich aus der Natur dieser Reihe völlig ähnliche Rechnungsarten herleiten liessen.

Wirklich bedienet man sich bey Messung der Winkel der Sexagesimal-Eintheilung der Maasse; da man Einem Grade (so wie auch bey Abmessung der Zeit, Einer Stunde) 60 Minuten, einer Minute 60 Secunden u. s. w. gibt. Also werden die Minuten, Secunden 2c. Sexagesimalbrüche der Grade (der Stunden) d. i. es werden solche Brüche, deren Nen-

ner

ner Potenzen von 60 sind. Man darf auch diese Brüche nur durch eine Reihe ausdrücken, deren Glieder Potenzen negativer Exponenten von 60, und deren Coefficienten die Zähler derselben sind. Nur macht man hier die kleine Veränderung, daß man, der Kürze wegen, die Potenzen der 60, worein die Zähler der Brüche zu multipliciren sind, nicht wirklich hinsezt, sondern dafür die Zähler der Brüche als Zahlen verschiedener Sexagesimalordnungen ansiehet. Der Exponent ihrer Ordnung ist sodann allemal einerley mit dem Exponenten der Potenz von 60, deren Coefficienten sie sind. Man seßet diesen Exponenten der Ordnung eben so über die Ziffern, wie bey den Decimalbrüchen. Demnach wird der Ausdruck $50^{\circ}\ 26^{I}\ 31^{II}\ 40^{III}\ 21^{IV}$ so geschrieben: $50^{\circ}\ 21^{-1}\ 31^{-2}\ 40^{-3}\ 21^{-4}$. Also ist auch hier der Exponent der Ordnung des Produkts die Summe der Exponenten der Faktoren; und man subtrahirt den Exponenten der Ordnung des Divisors vom Exponenten des Dividends, um den Exponenten der Ordnung des Quotienten zu finden.

§. 212.

Harmonische Progression.

Wenn eine Zahl nach und nach durch die Glieder einer arithmetischen Progression dividirt wird, so erhält man eine harmonische Progression.

Z. B. $\frac{18}{1}; \frac{18}{2}; \frac{18}{3}$ ꝛc. $= 18; 9; 6;$ ꝛc.

Sonsten heißt eine harmonische Progression, worinnen die Zahlen in einer stetigen harmonischen Proportion einander folgen: und eine harmonische Proportion, worinnen sich die Differenz des klein-

sten und mittelsten Gliedes zur Differenz des mittelsten und grösten verhält, wie das kleinste Glied gegen das gröste.

Z. B. 10; 12; 15

hier ist $12 - 10 : 15 - 12 = 10 : 15$

Wenn die harmonische Proportion zwischen vier Zahlen statt finden, und sie also unstetig seyn soll; so muß sich aufsteigend die Differenz des ersten und zweyten Gliedes zur Differenz des dritten und vierten verhalten, wie das erste Glied zum vierten.

Z. B. Wenn 2; 3; 6; 12, so ist

$2 - 3 : 6 - 12 = 2 : 12$

§. 213.

Wenn eine Grösse in eine andere nicht vollkommen verwandelt werden kann, so wird sie auf eine unendliche Reihe reducirt. Dergleichen sind die Quotienten der Grössen, die keine Multipla des Divisors sind; auch die Wurzeln aller unvollkommenen Potenzen.

Z. B. Man suche den Quotienten aus $\frac{1}{1+x^2}$, so kommt

$1 + x^2$ in 1 $(1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8$ &c.

$1 + x^2$

$-x^2 + 0$

$-x^2 - x^4$

$+x^4 + 0$

$+x^4 + x^6$

$-x^6 + 0$

$-x^6 - x^8$

$+x^8$ &c.

Eben

Eben so wird

$$\frac{a}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{ax^2}{b^3} - \frac{ax^3}{b^4} + \frac{ax^4}{b^5} \infty$$

und

$$\frac{a^2}{x+b} = \frac{a^2}{x} - \frac{a^2b}{x^2} + \frac{a^2b^2}{x^3} - \frac{a^2b^3}{x^4} + \frac{a^2b^4}{x^5} \infty$$

§. 214.

Eben so wird eine unendliche Reihe entstehen, wenn man aus einer gegebenen Grösse die Wurzel nicht vollkommen extrahiren kann.

Z. B. Man soll die Quadratwurzel aus $a^2 - x^2$ extrahiren, oder $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ wirklich finden.

Man extrahire also (mittelst der Formul $m^2 + 2mn + n^2$)

$a^2 - x^2 (a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3}$ ferner fort: $- \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} - \frac{7x^{10}}{256a^9} - \frac{21x^{12}}{1024a^{11}} \infty$

gesezt:

$2a$ in $\frac{a^2}{} - x^2$

$- \frac{2ax^2}{2a} + \frac{x^4}{4a^2}$

$2a - \frac{2x^2}{2a}$ in $- \frac{x^4}{4a^2}$

$- \frac{2ax^4}{8a^3} + \frac{x^6}{8a^4}$

$(\frac{x^4}{8a^3})^2 = + \frac{x^8}{64a^6}$

$\frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6} \infty$

Es sey z. B. $a = 5$, $x = 3$.
so ist $a^2 - x^2 = 25 - 9 = 16$
und $\sqrt{(a^2 - x^2)} = 4 = 5 - \frac{9}{10} - \frac{81}{1000} - \frac{729}{50000}$ &c.

Eben so wird aus $\sqrt{(a^2 + x^2)}$
die Reihe $a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \infty$

Und aus $\sqrt{(a^2 + bx - x^2)}$
wird $a + \frac{bx}{2a} - \frac{x^2}{2a} - \frac{b^2x^2}{8a^3} \infty$

§. 215.

Ja, man kann auch willkührliche Reihen annehmen, wenn nur ihr willkührlich angenommenes Gesez beständig bleibt:

Z. B. $\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{8}{105} \cdot \frac{16}{945}$ &c.

Man muß nur eine Seriem also schreiben, daß das Gesez ihrer Entstehung und Zusammensezung leicht in die Augen fallt, und der Ausdruck von ihr statt einer Generalformel für sie gelten kann. Z. B. im obigen Ausdruck siehet man die geometrische Progression der Zähler nach dem Exponenten 2 gar leicht; allein die Nenner sind nach ihrer Entstehungsart schwerer zu entdecken. Wenn man sie aber also schreibt.

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1.3} \cdot \frac{4}{1.3.5} \cdot \frac{8}{1.3.5.7} \cdot \frac{16}{1.3.5.7.9} \text{ &c.}$$

so ist nichts leichter, als das Gesez ihrer Entstehungsart zu finden.

*) Eben so ist das Gesez folgender Reihe nicht sogleich beym ersten Anblick klar.

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{5}{128} \cdot \frac{7}{256}$ &c.

hins

hingegen erhellet es bald, wenn die Reihe also geschrieben wird:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2.4}, \frac{1.3}{2.4.6}, \frac{1.3.5}{2.4.6.8}, \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10} \text{ ꝛc.}$$

§. 216.

Vom Fortschreiten der Reihen merke man noch folgende Sätze:

1.) Nachdem eine Grösse unendlich worden ist, so kann sie endlich positiv und werden, wie in folgender Reihe geschiehet:

$$\frac{1}{\infty}, \frac{1}{9}, \frac{1}{4}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{\infty} \text{ u. s. w.}$$

2.) Sodann gibt es auch einen Uebergang aus dem Unendlichen ins Endliche, aber ins Negative, wie es folgende Reihe zeiget:

$$+\frac{1}{4}, +\frac{1}{3}, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{1}, +\frac{1}{0}, -\frac{1}{1}, -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$
u. s. w.

3.) Hernach kann es auch geschehen, daß eine Grösse, nachdem sie unendlich worden ist, imaginär wird; von welchem Uebergang folgendes ein Beyspiel ist:

$$\frac{1}{\sqrt{4}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{1}}; \frac{1}{\sqrt{0}}; \frac{1}{\sqrt{-1}};$$
$$\frac{1}{\sqrt{-2}}; \frac{1}{\sqrt{-3}} \text{ u. s. w.}$$

Verwandlung der Brüche in unendliche Reihen. Summirung derselben.

§. 217.

Man kann einen Bruch durch Dividiren, wenn man seinen Nenner in 2 Theile zerfället, in eine unendliche Reihe von Brüchen verwandlen.

Z. B. $\frac{1}{3}$. Weil $\frac{1}{3} = \frac{1}{2+1}$ so darf man nur 1 durch $2+1$ wirklich dividiren: nemlich $\frac{1}{2+1} = \frac{1+0}{2+1}$

mithin

$2+1$ in $1+0$ ($\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64}$ &c.

$1 + \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} + 0$

$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

$+\frac{1}{4} + 0$

$+\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

$-\frac{1}{8} + 0$

$-\frac{1}{8} - \frac{1}{16}$

$+\frac{1}{16} + 0$

$+\frac{1}{16} + \frac{1}{32}$

$-\frac{1}{32} + 0$

$-\frac{1}{32} - \frac{1}{64}$

$+\frac{1}{64} + 0$ &c.

Es ist demnach

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} \text{ &c.}$$

Diese

Diese Reihe lässet sich leicht fortsetzen; denn man siehet:

1.) daß die Zeichen abwechslen.

2.) daß der Nenner des folgenden Bruchs entsteht, wenn man den Nenner des vorhergehenden Bruchs mit 2 multiplicirt. Es ist also

$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128} - \frac{1}{256} + \frac{1}{312} - \frac{1}{624} + \frac{1}{1248}$ &c. ∞

Da aber auch $\frac{1}{3} = \frac{1}{4-1}$ so kann man auch $1+0$ mit $4-1$ dividiren:

$4-1$ in $1+0$ ($\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024}$ &c. ∞

$\frac{4}{4} - \frac{1}{4}$

$+\frac{1}{4}+0$

$+\frac{1}{4} - \frac{1}{16}$

$+\frac{1}{16}+0$

$+\frac{1}{16} - \frac{1}{64}$

$+\frac{1}{64}+0$

$+\frac{1}{64} - \frac{1}{256}$

$+\frac{1}{256}+0$

$+\frac{1}{256} - \frac{1}{1024}$

$+\frac{1}{1024}$ &c. ∞

Auch diese Reihe lässet sich ohne wirkliches Dividiren leicht fortsetzen; denn man siehet, daß das Zeichen $+$ immer bleibt, und daß der Nenner des folgenden Bruchs entstehet, wenn man den vorhergehenden Nenner mit 4 multiplicirt.

Da nun $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024}$ ∞, und eben so auch $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ ∞, so folget, daß eine unendliche Reihe von Brüchen einer anderen unendlichen Reihe von Brüchen gleich seyn könne.

Weitere Beyspiele.

*) Weil $\frac{1}{4} = \frac{1}{3+1}$ so kommt daher bey wirklicher Division

$\frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} \infty$

die Zeichen wechslen ab, und das folgende Glied entstehet, wenn der vorhergehende Nenner mit 3 multiplicirt wird.

Oder auch weil $\frac{1}{4} = \frac{1}{5-1}$, so kommt

$\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} \infty$

das Zeichen + bleibt beständig, und der folgende Nenner entsteht, wenn man den vorhergehenden mit 5 multiplicirt.

*) Weil $\frac{1}{5} = \frac{1}{4+1}$ so ist auch

$\frac{1}{5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{1}{256} \infty$

oder auch, da $\frac{1}{5} = \frac{1}{6-1}$, so kommt

$\frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{216} + \frac{1}{1296} \infty$

*) Weil $\frac{5}{6} = \frac{5}{5+1}$, so ist

$\frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \frac{1}{125} \infty$

oder auch, da $\frac{5}{6} = \frac{5}{7-1}$, so ist auch

$\frac{5}{6} = \frac{5}{7} + \frac{5}{49} + \frac{5}{343} + \frac{5}{2401} \infty$

Man kann aber auch die ganze Zahl 1 in eine unendliche Reihe von Brüchen verwandlen;

Denn $1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{2-1}$ demnach

$2-1$ in $1 + 0$ ($\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\infty$

$\frac{2}{2} - \frac{1}{2}$

$+\frac{1}{2} + 0$

$+\frac{2}{4} - \frac{1}{4}$

$+\frac{1}{4} + 0\infty$

also $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\infty$

Oder weil auch $1 = \frac{2}{2} = \frac{2}{3-1}$

$3-1$ in $2 + 0$ ($\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27}\infty$

$\frac{6}{3} - \frac{2}{3}$

$+\frac{2}{3} + 0$

$+\frac{6}{9} - \frac{2}{9}$

$+\frac{2}{9} + 0\infty$

also auch $1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27}\infty$

Oder, weil ferner $1 = \frac{3}{3} = \frac{3}{4-1}$, so kommt

$1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \frac{3}{256}\infty$

Und eben so lassen sich auch andere ganze Zahlen in unendliche Reihen von Brüchen verwandlen:

*) Weil $2 = \frac{2}{1} = \frac{2}{3-2}$, so dividire man

$3-2$ in $2 + 0$ ($\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27}\infty$

$\frac{6}{3} - \frac{4}{3}$

$+\frac{4}{3} + 0$

$\frac{12}{9} - \frac{8}{9}$

$+\frac{8}{9} + 0\infty$

also $2 = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27}\infty$

Die

Die Reihe läßt sich ohne Dividiren fortsetzen, wenn man den Zähler mit 2, und den Nenner mit 3 multiplicirt.

Es ist aber auch $2 = \frac{2}{4-3}$ oder $\frac{2}{5-4}$ oder $\frac{2}{6-5}$ &c.

Demnach lassen sich vielerley unendliche Reihen für 2 finden.

*) 3 ist $= \frac{3}{1} = \frac{3}{4-1}$, daher kommt

$3 = \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} \infty$

Es geben aber auch $\frac{3}{5-4}$ oder $\frac{3}{6-5}$ oder $\frac{3}{7-6}$ noch andere Reihen.

*) 5 ist $= \frac{5}{1} = \frac{5}{6-5}$, daher kommt

$5 = \frac{5}{6} + \frac{25}{36} + \frac{125}{216}$ &c. u. s. w.

§. 219.

Es gibt Fälle, wo diese Division nicht anzugehen scheinet:

Z. B. $\frac{1}{2}$ ist $= \frac{1}{1+1}$; man versuche also die Division:

$1 + 1$ in $1 + 0$ ($1 - 1 + 1 - 1 \infty$

$1 + 1$

$-1 + 0$

-1

$+1 + 0$

$+1$

$-1 + 0 \infty$

Es käme also $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1$ ꝛc. welches widersinnig scheint: denn wenn man irgendwo mit — aufhöret, so gibt die Reihe 0, höret man aber mit + 1 auf, so gibt sie 1. Allein eben hieraus läßt sich die Sache begreiffen, weil man ohne Ende fortgehen, und weder bey — 1 noch + 1 irgendwo aufhören muß, so kann weder 1 noch 0 kommen, sondern etwas dazwischen, welches $= \frac{1}{2}$ ist.

Euler Teutsche Algebra I. Th. Cap. 5. §. 300.

*) Man sezte oben $\frac{1}{3} = \frac{1}{2+1}$ und erhielte $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$ ꝛc. Man setze es nun aber $= \frac{1}{1+2}$ und versuche die Division:

$1 + 2$ in $1 + 0 (1 - 2 + 4 - 8 \infty$

$1 + 2$

$-2 + 0$

$-2 - 4$

$+4 + 0$

$+4 + 8$

$-8 + 0 \infty$

Es scheinet nicht, daß diese Reihe jemals $= \frac{1}{3}$ geben könne; allein man erinnere sich nur, daß man jedesmal auch den Rest dazu nehmen müsse. Z. B. Wenn man bey dem 2ten Glied aufhören wollte, so bleibt im Rest $+ \frac{4}{1+2} = \frac{4}{3}$

Nun ist immerhin $1 - 2 + \frac{4}{3} = -1 + \frac{4}{3} = -\frac{3}{3} + \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$. Höret man beym dritten Glied

Glied auf, so ist der Rest $= -\frac{8}{3}$ und abermal $1 - 2 + 4 - \frac{8}{3} = 3 - \frac{8}{3} = \frac{9}{3} - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$. Man vergesse also niemals, auch auf den Rest Rücksicht zu nehmen.

Ueberhaupt scheinen diese Divisionen und ihre Quotienten widersinniger, wenn man 1 zum ersten Glied des Divisors macht; z. B. wenn man sezt $\frac{1}{5} = \frac{1}{1+4}$, $\frac{1}{4} = \frac{1}{1+3}$, statt daß man oben sezte $\frac{1}{5} = \frac{1}{4+1}$, $\frac{1}{4} = \frac{1}{3+1}$ u. s. w.

§. 220.

Auch geben solcherley Divisionen oft sonderbare Resultate.

*) Man dividire 1 durch $1 - 1$, oder suche den Quotienten von $\frac{1}{0}$

$1 - 1$ in $1 + 0$ ($1 + 1 + 1 + 1 \infty$

$1 - 1$

$+ 1 + 0$

-1

$+ 1 + 0$

-1

$+ 1 + 0 \infty$

Es kommt also $\frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \infty$, welches anzeigt, daß 1 in Ansehung 0 einen unendlich grossen Werth habe.

*) Man dividire 1 durch $1 - 2$. Es ist aber $\frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1$. Demnach verwandle man also -1 in eine Reihe.

$1 - 2$

$$1-2 \text{ in } 1+0\,(1+2+4+8.\,\infty$$
$$\underline{1-2}$$
$$+2+0$$
$$\underline{-4}$$
$$+4+0$$
$$\underline{-8}$$
$$+8+0.\,\infty$$

Es kommt also eine noch widersinnigere Reihe: $-1 = 1+2+4+8$ ꝛc. Allein will man in dieser ins Unendliche fortgehenden Reihe irgendwo stehen bleiben, so muß allezeit ein Bruch dazu gesezt werden. Z. B. man will nur auf folgende Glieder gehen: $1+2+4+8+16+32+64$; so hat man hier noch den Bruch $\frac{128}{1-2}$ d. i. $\frac{128}{-1} = -128$ dazu zu thun; hiedurch erhält man $127-128=-1$.

§. 221.

Man kann auch einen Divisor von 3 Theilen haben.

$$1-a+a^2 \text{ in } 1\,(1+a-a^3-a^4+a^6+a^7\,\infty$$
$$1-a+a^2$$
$$\underline{\quad}$$
$$+a-a^2$$
$$+a-a^2+a^3$$
$$\underline{\quad}$$
$$-a^3$$
$$-a^3+a^4-a^5$$
$$\underline{\quad}$$
$$-a^4+a^5$$
$$-a^4+a^5-a^6$$
$$\underline{\quad}\quad\underline{\quad}$$
$$+a^6$$
$$+a^6-a^7+a^8$$
$$\underline{\quad}\quad\underline{\quad}$$
$$+a^7-a^8$$
$$+a^7-a^8+a^9$$
$$\underline{\quad}\quad\underline{\quad}$$
$$-a^9\,\infty.$$

Setzet man $a = 1$, so kommt

$1 = 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 \infty$

welche Reihe die für $\frac{1}{2}$ schon oben gefundene $1 - 1 + 1 - 1 + 1 \infty$ doppelt in sich enthält, wie auch aus der Natur der Sache folget.

§. 222.

Man dividire c durch $a + b$

$$a + b \text{ in } c \quad \left(\frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} + \frac{b^3c}{a^4} \infty\right.$$

$$\begin{array}{l} c + \frac{bc}{a} \\ \hline -\frac{bc}{a} \\ \\ -\frac{bc}{a} - \frac{b^2c}{a^2} \\ \hline +\frac{b^2c}{a^2} \\ \\ +\frac{b^2c}{a^2} + \frac{b^3c}{a^3} \\ \hline -\frac{b^3c}{a^3} \infty \end{array}$$

Man erhält also für $\frac{c}{a+b}$ die Generalformel

$$\frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} + \frac{b^3c}{a^4} \infty$$

Z. B. Es sey $a = 2$, $b = 4$, $c = 3$,

so ist $\frac{c}{a+b} = \frac{3}{4+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 3 + 6 - 12. \infty$

Es

Es sey $a=10$, $b=1$, $c=11$,

so ist $\frac{c}{a+b} = \frac{11}{10+1} = 1 = \frac{11}{10} - \frac{11}{100} + 1\frac{11}{000} - \frac{11}{10000} \infty$.

also ist z. B. $\frac{y}{1+y} = y^2 - y^3 + y^4 - y^5 \infty$

*) Man dividire auch c durch $a-b$.

$a-b$ in c $\left(\frac{c}{a} + \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} \infty\right.$

$\frac{ac}{a} - \frac{bc}{a}$

$+\frac{bc}{a}$

$\frac{abc}{a^2} - \frac{b^2c}{a^2}$

$+\frac{b^2c}{a^2}$

$\frac{ab^2c}{a^2} - \frac{b^3c}{a^3}$

$+\frac{b^3c}{a^3} \infty$

Man erhält also für $\frac{c}{a-b}$ die Generalformel

$$\frac{c}{a} + \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} + \frac{b^3c}{a^4} \infty$$

Also ist z. B. $\frac{y}{1-y} = y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 \infty$.

§. 223.

— Nun kommt es vornemlich darauf an, solche unendliche Reihen von Brüchen zu summiren. Wenn nemlich bey einer Reihe immer abnehmender Brüche, die Glieder, nach und nach addirt, Etwas geben, das sich einer gewissen Zahl immer nähert, und solcher, wenn man mehr und mehr Glieder nimmt, so nahe kommen kann, als man nur will, sie aber nie völlig erreicht, so sieht man die Reihe als unendlich weit fortgesezt an, und heißt die erwähnte Zahl die **Summe dieser unendlichen Reihe.**

(Kästner, Anal. endl. Gr. §. 108.)

Es erhellet hieraus, daß man grossen Vortheil daraus habe, wenn man die unendliche Reihe auf eine solche Form bringen kann, in der sie auf das geschwindeste abnimmt: denn wenn sie schnell abnimmt, so ist es genug, wenn einige der ersten Glieder addirt werden, und die folgenden kann man ohne merklichen Fehler weglassen.

Z. B. Es sey $\sqrt{(a^2 + x^2)}$; je kleiner x gegen a ist, desto schneller nimmt die Reihe ab.

$$a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} \text{ &c.}$$

Da die Zähler gegen ihre Nenner sehr klein werden.

Man setze $a = 10$; $x = 1$; so wird

$$\sqrt{101} = 10 + \frac{1}{20} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{1600000} \text{ &c.}$$

Es ist offenbar, daß schon das vierte Glied so klein ist, daß bereits die drey ersten die Wurzel der Zahl schon ziemlich genau ausdrücken.

§. 224.

Man behalte nun die beyden Hauptformeln:

$s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$ vor die Summe der steigenden Progression, wo q ein uneigentlicher Bruch ist,

und

$s = \frac{a - \omega q}{1 - q}$ vor die Summe der fallenden Progression, oder wo die folgenden Glieder kleiner werden, und q ein eigentlicher Bruch ist.

§. 225.

Die Kunst, Reihen zu summiren, beruhet nun vornemlich darauf, daß man eine und andere Reihe summiren könne, welche sodann als Formeln dienen, auf welche man andere bringen kann; oder wenn sich dieses nicht thun lässet, so zerfället man sie in mehrere, bey denen es möglich ist, und deren einzelne Summen die Totalsumme geben.

§. 226.

Aufgabe.

Man soll die Summe einer unendlichen geometrischen Reihe von Brüchen finden, da der Zähler des ersten Gliedes = 1, und der Exponent dem ersten Gliede gleich ist.

Auflösung. Hier hat man sich der Formul $s = \frac{\omega q - a}{1-q}$ zu bedienen; sie wird hier, weil ω bey Fortsetzung der Reihe kleiner, als jede angebliche Grösse werden kann

$$s = \frac{\infty a - a}{1-a} = \frac{a}{1-a}$$

Demnach sind die Summen von

$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81} \ldots\ldots = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256} \ldots\ldots = \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}, \frac{1}{x^4} \ldots\ldots = \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^4}, \frac{1}{x^6}, \frac{1}{x^8} \ldots\ldots = \frac{1}{x^2-1}$$

§. 227.

Wenn die Glieder einer solchen Reihe wechselsweise die Zeichen + und — vor sich haben; so kann man sie als die Differenz zweyer Reihen von eben der Art ansehen.

Es sey die Reihe:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^6} \ldots$$

so ist diese Reihe

$$= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} \ldots\right) - \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} \ldots\right)$$

Es ist aber vermög des vorigen §.

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} \ldots = \frac{1}{x^2-1}$$

und

und

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}\ldots=\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}\ldots\right)$$

$$=\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)$$

$$=\frac{x}{x^2-1}$$

Also die Reihe

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}\,\&c.=\frac{x}{x^2-1}-\frac{1}{x^2-1}$$

$$=\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{(x-1)1}{(x-1)(x+1)1}$$

$$=\frac{1}{x+1}$$

§. 228.

Aufgabe.

Man soll die Summe einer unendlichen Reihe von Brüchen finden, die in einer geometrischen Progression fortgehen, und deren Zähler 1 ist.

Auflösung. Man nenne den Nenner des ersten Bruchs $= a$

den Exponenten $= \frac{1}{m}$

So ist die Summe

$$=\frac{\text{Erstes Glied} - \text{Leztes}}{\text{Exponent} - 1}+\text{Erstes Glied}$$

$$=\frac{\frac{1}{a}-\text{Leztes Glied}}{m-1}+\frac{1}{a}$$

Nun aber ist das lezte Glied in Ansehung des ersten unendlich klein, mithin als nichts zu rechnen: es kommt also:

$$\text{Summe} = \frac{\frac{1}{a}}{\frac{}{m-1}} - 0 + \frac{1}{a}$$

$$= \frac{1}{a} : (m-1) + \frac{1}{a} = \frac{1}{(m-1)a} + \frac{1}{a} =$$

$$= \frac{1}{(m-1)a} + \frac{m-1}{(m-1)a} = \frac{m}{(m-1)a}$$

Z. B. Es sey $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ ∞

so ist $a = 2$; $m = 2$

mithin die unendliche Reihe =

$$= \frac{2}{(m-1)2} = \frac{2}{2} = 1.$$

*) $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ ∞

$$S = \frac{3}{(3-1)3} = \frac{1}{2}$$

Es werde nun aber statt des Zählers 1, eine allgemeine Zahl $= a$ gesezt;

so ist der erste Bruch $= \frac{b}{a}$;

der Exponent $= \frac{1}{m}$;

es kommt also

$$\frac{\frac{b}{a}}{\frac{}{m-1}} = 0 + \frac{b}{a} = s =$$

$$= \frac{b}{(m-1)a} + \frac{b}{a} = \frac{b}{(m-1)a} + \frac{bm-b}{(m-1)a}$$

$$= \frac{mb}{(m-1)a}$$

Z. B.

Z. B. Es sey die Progression

$$\frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32} \infty$$

so ist

$$a = 4. \frac{1}{m} = \frac{1}{2} \text{ folgl. } m = 2$$

und demnach die Summe der unendl. Reihe

$$\frac{2.3}{(2-1)4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$$

§. 229.

Es sey die Reihe zu summiren:

$$\frac{d}{bq} \infty \ldots\ldots \frac{d}{bq^4}; \frac{d}{bq^3}; \frac{d}{bq^2}; \frac{d}{bq}; \frac{d}{b}$$

Man bediene sich der allgemeinen Formel

$$s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$$

hier ist $\omega = \frac{d}{b}$ und $a = \frac{d^\infty}{bq}$

folgl. $$s = \frac{\frac{dq}{b} - \frac{d}{bq} \infty}{q-1}$$

Nun lasse man das unendlich kleine Glied, $\frac{d^\infty}{bq}$ aus;

so kommt $\frac{dq}{bq-b}$;

Als die Generalformel, alle solche Reihen zu summiren, welche vom unendlich kleinen an bis auf eine bestimmte Grösse wachsen.

§. *

Aufgabe.

Man soll die Summe der unendlichen Reihe finden:

$$\frac{n}{n+1} + \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+1)^3} + \frac{n}{(n+1)^4} \cdots\cdots \frac{n^\infty}{(n+1)}$$

Auflösung. Man kehre die Reihe um

$$\frac{n^\infty}{(n+1)} \cdots\cdots + \frac{n}{(n-1)^5} + \frac{n}{(n-1)^4} + \frac{n}{(n-1)^3} + \frac{n}{(n-1)^2} + \frac{n}{(n-1)}$$

so ist sie eine zunehmende geometrische Reihe, deren beständiger Quotient, oder Exponent, $= q = (n+1)$; das erste Glied $= a = \frac{n^\infty}{(n+1)} = o$; und das lezte Glied $= \omega = \frac{n}{(n-1)}$;

folglich ist nach der Formel $s = \frac{\omega q - a}{q-1}$ hier:

$$s = \frac{\left(\frac{n}{n+1} \cdot (n+1) - \frac{n^\infty}{(n+1)}\right)}{(n+1)-1}$$

$$= \frac{n-o}{n} = \frac{n}{n} = 1;$$

So ist z. B. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots = 1$.

eben so $\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{2}{81} + \cdots = 1$.

§. 230.

§. 230.

Aufgabe.

Man soll eine Reihe von Brüchen addiren, deren Zähler in einer arithmetischen, die Nenner aber in einer geometrischen Progression fortgehen.

Es sey die Reihe

$$\frac{b}{c}+\frac{b+d}{cm}+\frac{b+2d}{cm^2}+\frac{b+3d}{cm^3}+\frac{b+4d}{cm^4}+\ldots\ldots$$

Aufl. Man zertheile diese Reihe in mehrere andere, wodurch das verwickelte gehoben wird, und welche sich sodann einzeln leicht addiren lassen. Nemlich

$$\frac{b}{c}+\frac{b}{cm}+\frac{b}{cm^2}+\frac{b}{cm^3}+\frac{b}{cm^4}+\frac{b}{cm^5}+\ldots.$$

$$+\frac{d}{cm}+\frac{d}{cm^2}+\frac{d}{cm^3}+\frac{d}{cm^4}+\frac{d}{cm^5}+\ldots.$$

$$+\frac{d}{cm^2}+\frac{d}{cm^3}+\frac{d}{cm^4}+\frac{d}{cm^5}+\ldots.$$

$$+\frac{d}{cm^3}+\frac{d}{cm^4}+\frac{d}{cm^5}+\ldots.$$

$$+\frac{d}{cm^4}+\frac{d}{cm^5}+\ldots.$$

u. s. w.

Nun sind alle Glieder in der ersten horizontalen

$$\text{Reihe}=\frac{bm}{c.(m-1)}$$

Alle

Alle Glieder in der zweyten Zeile sind

$$= \frac{d}{c.(m-1)}$$

Alle Glieder in der dritten Zeile sind

$$= \frac{d}{cm.(m-1)}$$

Alle Glieder in der vierten Zeile sind

$$= \frac{d}{cm^2.(m-1)}$$

Alle Glieder in der fünften Zeile sind

$$= \frac{d}{cm^3.(m-1)}$$ u. s. w.

Folglich ist die Summe der gegebenen Reihe

$$s = \frac{b}{c} + \frac{b+d}{cm} + \frac{b+2d}{cm^2} + \ldots = \frac{bm}{c.(m-1)} +$$

$$+ \frac{d}{c.(m-1)} + \frac{d}{cm.(m-1)} + \frac{d}{cm^2.(m-1)} +$$

$$+ \frac{d}{cm^3.(m-1)} + \frac{d}{cm^4.(m-1)} + \ldots$$

Nun sind alle Glieder, ausser dem ersten, in dem zweyten Theil der Gleichung

$$= \frac{dm}{c.(m-1)\,(m-1)}$$

weil sie auch eine wachsende geometrische Reihe ist, wenn man sie verkehrt ansetzet. Es ist demnach die gegebene Reihe

$$\frac{b}{c} + \frac{b+d}{cm} + \frac{b+2d}{cm^2} + \ldots$$

Nemlich die Summe aller Glieder dieser unendlichen Reihe

$$s =$$

$$s = \frac{bm}{c.(m-1)} + \frac{dm}{c.(m-1).(m-1)}$$

$$= \frac{bm^2 - bm + dm}{c.(m-1).(m-1)}$$

$$= m.\left(\frac{bm + d - b}{c.(m-1)^2}\right)$$

So z. B. ist die Summe dieser unendlichen Reihe

$$\frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \frac{6}{64} + \frac{7}{128} + \ldots =$$

$$= \frac{2.(6+1-3)}{8.(2-1)^2} = 1$$

§. 231.

Wie wir oben, §. 218. es durch Induktion zeigten, so sey nun auch die allgemeine

Aufgabe.

Eine jede gegebene Zahl r, durch eine unendliche Reihe auszudrücken.

Aufl. Man sehe die gegebene Zahl r als die Summe einer solchen Reihe an; ihr leztes Glied, welches unendlich klein ist, wird $= 0$; und nun kann man jede Zahl, welche man will, als ihr erstes Glied betrachten, und nun aus diesen 3 gegebenen Stücken a, ω, s, den Exponenten q suchen.

Wir hatten oben (§. 58.) für die Summe die Formel

$$s = \frac{\omega q - a}{q-1}$$ daraus folgt

$$sq - s = \omega q - a$$

$$sq - \omega q = s - a$$

$$q = \frac{s-a}{s-\omega}$$

Es ist aber in gegenwärtigem Fall $\omega = 0$; also

$$q = \frac{s-a}{s} \text{ oder } \frac{r-a}{r}$$

Z. B. Es sey die Zahl 8 durch eine unendliche Reihe auszudrücken, so setze man beliebig $a = 6$; dies gibt

$$q = \frac{8-6}{8} = \frac{1}{4}$$

also die gesuchte Reihe

$$6 + 6.\frac{1}{4} + 6.\frac{1}{4}.\frac{1}{4} + 6.\frac{1}{4}.\frac{1}{4}.\frac{1}{4} \infty$$

das ist

$$6 + 1\frac{1}{2} + \frac{6}{10} + \frac{6}{64} + \frac{6}{256} \infty$$

Andere Arten, einen Bruch in eine unendliche Reihe zu verwandlen.

§. 232.

Wenn eine Reihe von dieser Form

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots.$$

sie mag nun endlich, oder unendlich seyn, immerhin $= 0$ bleibt, man mag auch für x einen Werth annehmen, was man für einen will, so ist immerhin $A = 0$; $B = 0$; $C = 0$; $D = 0$ u. s. w. Es mögen auch A, B, C, D &c. zusammengesezte Grössen seyn, wie sie wollen; z. B. $A = (1 - m)$; $B = (m^2 - m)$ u. s. w.

Da nun die Coefficienten A, B, C, D, E, F &c. immer $= 0$ bleiben, wenn man auch für x den grösten oder kleinsten Werth setzet, so ist es offenbar, daß sie auch noch 0 bleiben, was man auch für x immer

für

für einen beliebigen, zwischen dem grösten und kleinsten begriffenen Werth setzet.

Wenn demnach $o = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots$ immerfort statt findet, man mag dem x für einen Werth geben welchen man will; so ist auch jederzeit $A = o$; $B = o$; $C = o$; $D = o$ u. s. w.

Anmerkung. Dieser Satz wird sich im künftigen als sehr fruchtbar erweisen; und die erste Anwendung soll nun folgen.

§. 233.

Aufgabe.

Man soll den Bruch $\frac{1}{a+x}$ in eine unendliche Reihe verwandlen.

Auflösung. Man setze $\frac{1}{a+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + Gx^6 \ldots$ Es sollen nemlich A, B, C, D ... Grössen von solcher Beschaffenheit seyn, daß diese Gleichung statt haben könne. Im ersten Gliede der Reihe kann x keinen Platz finden; denn, da der Bruch nicht verschwindet, wenn man $x = o$ setzet, so darf auch die Reihe, welche diesem Bruche als gleich angenommen wird, in dieser Voraussetzung nicht verschwinden; welches doch geschehen würde, wenn sich x auch im ersten Gliede der Reihe befände. Da ferner die Reihe dem Bruch immer gleich seyn solle, was auch x für einen Werth hat, so muß sie aus den nach einander folgenden Potenzen von x bestehen; die Gestalt der Reihe $\frac{1}{a+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{ꝛc.}$ ist

demnach richtig angenommen, und es kommt nun nur noch darauf an, wie man die Grössen A, B, C, D, E ꝛc. bestimmen solle.

Die angenommene Reihe ist

$$\frac{1}{a+x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \text{ ꝛc.}$$

Nun multiplicire man mit dem Nenner $a + x$, so kommt

$$1 = aA + \left\{\begin{matrix} aBx \\ + Ax \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} aCx^2 \\ Bx^2 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} aDx^3 \\ Cx^3 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} aEx^4 \\ Dx^4 \end{matrix}\right\} + \ldots\ldots$$

und auf o reducirt,

$$o = (aA - 1) + (aB + A)x + (aC + B)x^2 + (aD + C)x^3 + (aE + D)x^4 \ldots\ldots$$

daraus wird, nach dem vorigen §. 232.

$$(aA - 1) = o$$
$$(aB + A) = o$$
$$(aC + B) = o$$
$$(aD + C) = o \text{ u. s. w.}$$

folglich $A = \frac{1}{a}$;

$$B = -\frac{A}{a} = -\frac{1}{a^2}$$

$$C = -\frac{B}{a} = +\frac{1}{a^3}$$

$$D = -\frac{C}{a} = -\frac{1}{a^4}$$

daraus erhält man also die Reihe:

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \frac{x^4}{a^5} - \frac{x^5}{a^6} + \ldots\ldots$$

Nun

Nun ist demnach das Gesez der Reihe bekannt: es sind nemlich alle ungerade Glieder positiv, und alle geraden negativ; ferner, der Exponent des Nenners ist die Zahl der Glieder selbst, und der Exponent des Zählers ist um 1 kleiner.

Z. B. Das 21te Glied $= + \frac{x^{20}}{a^{21}}$

folglich ist das nte Glied dieser Reihe $= \pm \frac{x^{n-1}}{a^n}$.

§. 234.

Das nte Glied einer Reihe wird das allgemeine Glied (Terminus generalis) genannt; weil es jedes Glied der Reihe vorstellt, wenn man n in Zahlen ausdrückt. So ist z. B. $\frac{x^{n-1}}{a^n} = \frac{1}{a} =$ dem ersten Gliede in obiger Reihe, wenn man $n = 1$ sezt. $\frac{x^{n-1}}{a^n} = \frac{x^4}{a^3} =$ dem 5ten Gliede der Reihe, wenn man $n = 5$ sezt.

Anm. Allemal aber muß das allgemeine Glied einer Reihe eine Function von n seyn, wenn man durch n jede beliebige Anzahl der Glieder ausdrücken will. Eine Function aber heißt ein jeder algebraischer Ausdruck, darinnen sich n auf was immer für eine Art implicirt befindet.

Z. B. $1on$, $(5 + \frac{1}{3}n)$, $(n^2 - an)$, $\sqrt{(a^2 - n^2)}$, $(n^m + n^{m-1} + a)$ u. s. w. sind lauter Functionen von n; und eben so sind ax, $(x^2 - 1)$, $\frac{10x}{3}$, $\sqrt[3]{(a^2x - b^3)}$ u. s. w. lauter Functionen von x.

§. 235.

Auf die nemliche Weise findet man

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \frac{x^3}{a^4} + \frac{x^4}{a^5} + \ldots\ldots$$

wenn man

$$\frac{1}{a-x} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots\ldots$$

setzet, beyderseits mit $(a-x)$ multipliciret, die Gleichung sodann auf o bringt, und endlich die Grössen A, B, C, D, E ꝛc. bestimmt. Setzet man $a=2$; $x=1$, also den Bruch $\frac{1}{2-1}=1$, so kommt, wie oben bey der Division, die Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots\ldots \infty = 1.$$

§. 236.

Der Bruch $\frac{1}{a+x}$ läßt sich ebenfalls also in eine unendliche Reihe auflösen, wenn man

$$\frac{1}{a+x} = A + B^{x-1} + C^{x-2} + D^{x-3} + E^{x-4} \text{ ꝛc. setzet.}$$

Multiplicirt man nun beyderseits, und reducirt die ganze Gleichung auf o, so kommt

$$1 = aA + B + Ax + \left.\begin{matrix} aB^{x-1} \\ + C^{x-1} \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} aC^{x-2} \\ + D^{x-2} \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} aD^{x-3} \\ + E^{x-3} \end{matrix}\right\} + \ldots\ldots$$

dieses gibt

$$0 = (aA + B + 1) + Ax + (aB + C)^{x-1} + (aC + D)^{x-2} + (aD + E)^{x-3} + \ldots\ldots$$

folg:

folglich $(aA + B + 1) = 0$
$(aB + C) = 0$
$(aC + D) = 0$ u. s. w.
Es kommt demnach die Reihe

$$\frac{1}{a+x} = x^{-1} - ax^{-2} + a^2x^{-3} + a^3x^{-4} + a^4x^{-5} + \ldots\ldots$$
$$= \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^3} - \frac{a^3}{x^4} + \frac{a^4}{x^5} + \ldots\ldots \pm \frac{a^{n-2}}{x^n}$$

§. 237.

Endlich kann der Bruch $\frac{1}{a+x}$ auch in eine unendliche Reihe verwandelt werden, wenn man

$$\frac{1}{a+x} = A + Ba + Ca^2 + Da^3 + Ea^4 + \ldots.$$

oder auch

$$\frac{1}{a+x} = A + Ba^{-1} + Ca^{-2} + Da^{-3} + Ea^{-4} + \ldots.$$

setzet, und sodann die Grössen A, B, C, D, E ꝛc. bestimmt.

§. 238.

Anmerkungen.

I. Die Reihe muß jederzeit aus den auf einander folgenden Potenzen eines Gliedes des Nenners bestehen. So muß z. B.

$$\frac{1}{a^2 - x^2} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + Ex^8 + \ldots.$$

und

$$\frac{1}{b+x^m} = A + Bx^m + Cx^{2m} + Dx^{3m} + Ex^{4m} + \ldots.$$ und

$$\frac{1}{a-\sqrt{x}} = \frac{1}{a-x^{\frac{1}{2}}} = A + Bx^{\frac{1}{2}} + Cx^{\frac{2}{2}} + Dx^{\frac{3}{2}} + Ex^{\frac{4}{2}} + Fx^{\frac{5}{2}} + \ldots.$$

angenommen werden.

II. Wenn der Nenner eines Bruchs aus mehr als 2 Gliedern bestehet, so muß man zwey oder mehrere Glieder des Nenners mit einem einzigen Buchstaben benennen, (oder substituiren).

Z. B. Wenn $\frac{1}{1+x+x^3}$ in eine unendliche Reihe zu verwandlen ist, so setze man $x+x^3=y$, und verwandle nun den Bruch nach vorhergehender Anleitung in eine unendliche Reihe; neml. $\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - y^5 + \ldots.$

und nun substituire man abermal für y, y^2, y^3, y^4 ꝛc. ihre Werthe $(x+x^3)$, $(x^2+2x^4+x^6)$, $(x^3+3x^5+3x^7+x^9)$, $(x^4+4x^6+\ldots.)$, $(x^5+5x^7+\ldots)+\ldots.$ so ist

$$\frac{1}{1+x+x^3} = 1 - x - x^3 + x^2 + 2x^4 + x^6 - x^3 - 3x^5 - 3x^7 + x^4 - x^5 + x^6 \ldots\ldots$$
$$= 1 - x + x^2 - 2x^3 + 3x^4 - 4x^5 + 5x^6 \ldots\ldots$$

III. Wäre

III. Wäre über dieses der Zähler 1 des gegebenen Bruchs mit einer anderen Grösse multiplicirt, so muß mit dieser nemlichen Grösse auch die Reihe multiplicirt werden. Z. B. da

$$\frac{1}{a+x} = \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \ldots\ldots \text{ so ist}$$

$$\frac{a-x}{a+x} = (a-x.)\frac{1}{a+x} = (a-x).\left(\frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{x^2}{a^3} - \frac{x^3}{a^4} + \ldots\right)$$

$$= 1 - \frac{2x}{a} + \frac{2x^2}{a^2} - \frac{2x^3}{a^3} + \frac{2x^4}{a^4} - \frac{2x^5}{a^5} + \ldots\ldots$$

§. 239.

Zuweilen ist es erforderlich, einen gegebenen Bruch in mehrere andere zu zertheilen, wenn es sich thun lässet: es muß aber von solchen ungleichen Faktoren jeder eine Function von einer nemlichen Grösse des nemlichen Exponenten vorstellen.

Z. B. Der Bruch $\frac{1}{a^2x - x^3}$ kann in 3 andere zerfällt werden, oder der Nenner $a^2x - x^3$ bestehet aus 3 ungleichen Faktoren x; $a+x$; $a-x$; jeder ist eine Function von der nemlichen Grösse x; auch hat x in einem jeden Faktor den nemlichen Exponenten 1. Um die 3 Brüche zu finden, setze man

$$\frac{1}{a^2x - x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a+x} + \frac{C}{a-x},$$

bringe diese drey Brüche unter gleiche Benennung, nemlich $\frac{1}{a^2x-x^3} =$

$$= \frac{a^2A - Ax^2 + aBx - Bx^2 + aCx + Cx^2}{a^2x - x^3}$$

oder $1 = a^2A + (aB+aC)x + (C-B-A)x^2$

und reducire die Gleichung auf 0, so ist

$$0 = (a^2A - 1) + (aB+aC)x + (C-B-A)x^2;$$

folgl. $(a^2A - 1) = 0$; $(aB+aC) = 0$;

$(C-B-A) = 0$

nemlich $A = \frac{1}{a^2}$; $B = -\frac{1}{2a^2}$; $C = \frac{1}{2a^2}$

Es ist demnach

$$\frac{1}{a^2x-x^3} = \frac{1}{a^2x} - \frac{1}{2a^2(a+x)} + \frac{1}{2a^2(a-x)}.$$

Diese Zerfällung findet auch noch Statt, wenn schon der Zähler des Bruchs eine zusammengesezte Grösse seyn sollte: nur muß in diesem Falle der höchste Exponent derjenigen Grösse, aus der man die ungleichen Faktoren formiret, in dem Zähler wenigstens um 1 kleiner seyn, als der höchste Exponent der nemlichen Grösse in dem Nenner ist.

Z. B. Der Bruch $\frac{1-x+x^2}{a^2x-x^3}$ wird in folgende drey Brüche verwandelt:

$$\frac{1}{a^2x} - \frac{(1+a+a^2)}{2a^2(a+x)} + \frac{(1-a+a^2)}{2a^2(a-x)},$$

wenn man

$$\frac{1-x+x^2}{a^2x-x^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a+x} + \frac{C}{a-x}$$ sezet, die

Brüche

Brüche auf gleiche Benennung bringt, die ganze Gleichung auf o reducirt, und endlich die Grössen A, B, C ꝛc. bestimmt.

§. 240.

Weitere Beyspiele.

*) Es sey der Bruch

$$\frac{a+bx+cx^2}{x^3-2ax^2+a^2x} = \frac{a+bx+cx^2}{x(x^2-a)^2} =$$

$$= \frac{a+bx+cx^2}{x(x-a)(x-a)}$$

zu zerfällen. Hier muß man

$$\frac{a+bx+cx^2}{x^3-2ax^2+a^2x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x-a)^2}$$

setzen (weil der Nenner sich nicht in lauter ungleiche Faktoren auflösen lässet); und sodann auf die nemliche Weise die Grössen A, B, C bestimmen.

*) Weil $\frac{1+x^3}{a^3x+x^4} = \frac{1+x^3}{x(x+a)(a^2-ax+x^2)}$;

so läßt sich dieser Bruch ebenfalls in andere zertheilen, wenn man

$$\frac{1+x^3}{a^3x+x^4} = \frac{A}{x} + \frac{B}{a+x} + \frac{Cx+D}{a^2-ax+x^2}$$

setzet, und sodann die Grössen A, B, C, D findet.

*) Es sey der Bruch $\frac{a^4}{ax^3+x^4} = \frac{a^4}{(a+x).x^3}$

zu zerfällen.

Man muß

$$\frac{a^4}{ax^3+x^4} = \frac{A}{a+x} + \frac{Bx^2+Cx+D}{x^3}$$

setzen; So ist alsdenn

$$a^4 = Ax^3 + aBx^2 + aCx + aD + Bx^3 + Cx^2 + Dx,$$

wenn man die Brüche auf einerley Benennung bringt, und den gemeinschaftlichen Nenner beyderseits wegläßt; oder

$$0 = \left.\begin{matrix} aD + aC \\ -a^4 + D \end{matrix}\right\}x + \left.\begin{matrix} aB \\ + C \end{matrix}\right\}x^2 + \left.\begin{matrix} A \\ + B \end{matrix}\right\}x^3$$

wenn man die Gleichung ordnet, und sie auf 0 reduciret.

folglich $aD - a^4 = 0$ nemlich $D = a^3$

$aC + D = 0$ ..... $C = -a^2$

$aB + C = 0$ ..... $B = a$

$A + B = 0$ ..... $A = -a$

Es ist demnach der gegebene Bruch

$$\frac{a^4}{ax^3+x^4} = -\frac{a}{a+x} + \frac{ax^2 - a^2x + a^3}{x^3} =$$

$$= -\frac{a}{a+x} + \frac{a}{x} - \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}$$

§. 241.

Wenn $x = \frac{y}{1+y}$ ist, so ist es klar, (nach §. 233.), daß auch $x = y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 - y^6 + \ldots$ &c. sey.

Nun soll man den Werth von y aus dieser Gleichung ebenfalls durch eine unendliche Reihe bestimmen.

Um diesen Werth von y zu finden, welcher allerdings eine Function von x seyn muß, so setze man

y =

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Dx^5 \ldots . B.$$

So ist auch

$$y^2 = A^2x^2 + 2ABx^3 + B^2x^4 + 2ACx^4 + \ldots$$
$$y^3 = A^3x^3 + 2A^2Bx^4 + \ldots$$
$$y^4 = A^4x^4 + \ldots$$

u. s. w.

Nun substituire man diese Werthe für y, y^2, y^3 .... in der Gleichung A, und bringe sodann die ganze Gleichung auf o, so ist

$$\left.\begin{array}{l} o = A \\ -1 \end{array}\right\} x + \left.\begin{array}{l} B \\ -A^2 \end{array}\right\} x^2 + \left.\begin{array}{l} C \\ -2AB \\ +A^3 \end{array}\right\} x^3 + \left.\begin{array}{l} D \\ -2AC \\ -B^2 \\ +2AB \\ -A^4 \end{array}\right\} x^4$$

u. s. w.

folglich $A - 1 = o$ nemlich $A = 1$

$B - A^2 = o$ ..... $B = 1$

$C - 2AB + A^3 = o$ ... $C = 1$ u. s. w.

Es kommt demnach, wenn man in der Gleichung B für A, B, C, D.... die gefundenen Werthe substituiret,

$$y = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots$$

Dieses ist klar; denn wir haben $x = \frac{y}{1+y}$; nemlich $x + xy = y$, das ist $y = \frac{x}{1-x}$ angenommen; welches nach obigem §. 233. dieser nemlichen Reihe gleichet.

§. 242.

Auf die nemliche Art findet man aus der Gleichung

$$z = x + \frac{1.x^3}{2.3} + \frac{1.3.x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5.x^7}{2.4.6.7} + \frac{1.3.5.7.x^9}{2.4.6.8.9} + \ldots\ldots \text{ A.}$$

den Werth von x, wenn man

$$x = Az + Bz^3 + Cz^5 + Dz^7 + \ldots\ldots \text{ B.}$$

setzet, denn alsdenn ist

$$x^5 = A^3z^3 + 3A^2Bz^5 + 3AB^2z^7 + B^3z^9 + 3A^2Cz^7 + \ldots\ldots$$
$$x^6 = A^5z^5 + 5A^4z^7 + \ldots\ldots$$
$$x^7 = A^7z^7 + \ldots\ldots$$

u. s. w.

Substituirt man nun diese Werthe für x, x^3, x^5 .... in der Gleichung A, und reducirt sodann die ganze Gleichung auf o, so ist

$$o = \left.\begin{array}{l} A \\ -1 \end{array}\right\} z + \left.\begin{array}{l} B \\ \frac{A^3}{2.3} \end{array}\right\} z^3 + \left.\begin{array}{l} C \\ \frac{3A^2B}{2.3} \\ \frac{3A^5}{2.4.5} \end{array}\right\} z^5 \text{ u. s. w.}$$

Folglich $A = 1$; $B = -\frac{1}{2.3}$; $C = -\frac{1}{2.3.4.5}$;

$$D = -\frac{1}{2.3.4.5.6.7}; \text{ u. s. w.}$$

Es ist demnach, wenn man in der Gleichung B für A, B, C, D, ... diese gefundenen Werthe setzet,

$$x = z - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^5}{2.3.4.5} - \frac{z^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots\ldots$$

Anmerkung. Man erhält den nemlichen Werth für x, obschon etwas mühsamer, wenn man

$$x = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \ldots\ldots$$

setzet;

setzet; denn bey der Entwicklung der Grössen A, B, C, D .... findet man, daß B, D u. s. w. nemlich alle Coefficienten der geraden Potenzen Nullen sind, und daß folglich die gesuchte Reihe nur die ungeraden Potenzen von z enthalten müsse. S. G. Vega, Vorlesungen über die Mathematik. I. Band. Wien. 1782.

§. 243.

Als einen Anhang bey Anführung dieser Methode der Verwandlung der Brüche, und zugleich als ein weiteres Beyspiel der Fruchtbarkeit des Satzes §. 233. wollen wir auch einige Beyspiele

Von Ausziehung der Wurzeln und Verwandlung derselben in unendliche Reihen

beyfügen.

Aufgabe.

Man soll $\sqrt{(a+x)}$ in eine unendliche Reihe verwandlen.

Auflösung. Um diese Reihe zu finden, setze man

$$\sqrt{(a+x)} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots.$$ so ist

$$a + x = A^2 + 2ABx + B^2x^2 + 2BCx^3 + C^2x^4 + \ldots.$$
$$+ 2ACx^2 + 2ADx^3 + 2BDx^4 + \ldots.$$
$$+ 2AEx^4 + \ldots.$$

Nun bringe man die ganze Gleichung auf o, so ist

$$o =$$

$$0 = \left.\begin{matrix} A^2 + 2AB \\ -a \\ -1 \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} B^2 \\ +2AC \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} 2BC \\ +AD \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} C^2 \\ +2BD \\ +2AE \end{matrix}\right\} x^4 + \ldots$$

folglich

$A^2 - a = 0$; nemlich $A = a^{\frac{1}{2}}$

$2AB - 1 = 0 \ldots\ldots\ldots B = \frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}}$

$B^2 + 2AC = 0 \ldots\ldots\ldots C = -\frac{1}{2.2.2.a^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2.4.a^{\frac{3}{2}}}$

$2BC + 2AD = 0 \ldots\ldots\ldots D = \frac{1}{2.2.2.2.a^{\frac{5}{2}}} = -\frac{1.3}{2.4.6.a^{\frac{5}{2}}}$

$C^2 + 2BD + 2AE = 0 \ldots\ldots E = -\frac{1.5.}{2.2.2.2.2.2.2.a^{\frac{7}{2}}} = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8.a^{\frac{7}{2}}}$ u.s.w.

Es ist demnach

$$\sqrt{(a+x)} = a^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^2}{2.4.a^{\frac{3}{2}}} + \frac{1.3.x^3}{2.4.6.a^{\frac{5}{2}}} - \frac{1.3.5.x^4}{2.4.6.8.a^{\frac{7}{2}}} + \ldots$$

Ist

Ist nun x in Vergleichung gegen a sehr klein, etwa $a = 100$; $x = 1$; so lauft die Reihe sehr geschwinde zusammen, so daß man nur etliche wenige Glieder entwicklen darf, um einen ziemlich genauen Werth von $\sqrt{(a+x)}$ zu erhalten. Würde hingegen $x > a$ seyn, so müßte man $\sqrt{(a+x)} = A + Ba + Ca^2 + Da^3 + \ldots$ sezen, und sodann auf die nemliche Weise die Grössen A, B, C, D, bestimmen, um eine abnehmende Reihe

$$\sqrt{(a+x)} = x^{\frac{1}{2}} + \frac{a}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^2}{2.4.x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1.3.a^3}{2.4.6.x^{\frac{5}{2}}} + \frac{1.3.5.a^4}{2.4.6.8.x^{\frac{7}{2}}} + \ldots$$

zu erhalten; weil die zunehmenden unendlichen Reihen von keinem Nutzen sind, wenn man die Buchstaben in Zahlen ausdrückt.

Weitere Beyspiele.

*) Man soll $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ in eine unendliche Reihe verwandlen. Man sezze also $\sqrt{(a^2 - x^2)} = A + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$ weil die Reihe aus nach einander folgenden Potenzen eines Gliedes der Wurzelgrösse bestehen muß. Man erhält nach geschehener Reduction,

$$\sqrt{(a^2 - x^2)} = a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{2.4.a^3} - \frac{1.3.x^6}{2.4.6.a^5} - \frac{1.3.5.x^8}{2.4.6.8a^7} - \ldots$$

Sezt

Setzt man in diesem Ausdruck $a=1$; $x=1$; so ist

$$\sqrt{(a^2-x^2)}=\sqrt{(1-1)}=\sqrt{0}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2.4}-\frac{1.3}{2.4.6}-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}-\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}-\ldots\ldots$$

folglich

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2.4}+\frac{1.3}{2.4.6}+\frac{1.3.5}{2.4.6.8}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}+\ldots\ldots=1.$$

oder: die Summe aller Glieder dieser unendlichen Reihe von Brüchen ist einer Einheit gleich.

*) Eben so findet man, daß

$$\sqrt[3]{(a^6-x^6)}=a^2-\frac{x^6}{3a^4}-\frac{x^{12}}{9a^{10}}-\frac{5x^{18}}{81a^{16}}-\ldots\ldots \text{ sey.}$$

Wenn man nemlich

$$\sqrt[3]{(a^6-x^6)}=A+Bx^6+Cx^{12}+Dx^{18}+Ex^{24}+Fx^{30}+\ldots\ldots$$

setzet, beyde Theile der Gleichung zum Cubus erhebt, sodenn die ganze Gleichung auf 0 bringt, und endlich die Grössen A, B, C, D... entwickelt.

Das zweyte Kapitel.

Arithmetische Reihen. Polygonalzahlen. Differenzenreihen und ihre Anwendung.

Arithmetische Reihen. (Ar. Progressionen.)

§. 244.

Zu dem, was wir bereits im I. Th. I. Abschn. IV. Kap. von den arithmetischen Progressionen gesagt haben, wollen wir an gegenwärtigem Orte, wo sie uns der Ordnung nach wieder vorkommen, noch folgendes hinzusetzen:

Einrückung von Zwischengliedern.

Es kann sich zutragen, daß für die Zahl der Glieder in der Formel $n = \frac{u + d - a}{d}$ (§. 53.) bey der Berechnung ein Bruch kommt. In diesem Falle zeiget der Werth von n an, daß die Reihe, deren Gestalt eigentlich schon durch a und d bestimmt ist, kein Glied enthält, das dem gegebenen u gleich wäre, sondern daß es zwischen zwey in dieser Progression befindlichen Gliedern ligt.

z. B. wenn $a = 4$; $d = 3$; $u = 27$

so ist $n = \frac{27 + 3 - 4}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$

die

die Reihe aber ist folgende:

4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28 .....

hier ist nun das achte Glied 25 und das neunte Glied 28. Die Anzahl der Glieder muß also kleiner als 9 und grösser als 8 seyn; weil $u = 27$ zwischen die beyden Glieder 25, 28, fället. Und zwar gibt der gefundene Werth $8\frac{2}{3}$ zugleich an, wo eigentlich das gegebene lezte Glied u zwischen 25 und 28 ligt; die Entfernung des achten Gliedes vom nten soll nemlich zwey Drittheile von der Entfernung des 8ten vom 9ten Gliede betragen; d. i. wenn man zwischen 25 und 28 noch zwey mittlere arithmetische Proportionalzahlen sucht, (wofür man 26 und 27 erhält) so hat man diese vier Zahlen 25, 26, 27, 28, und man gelangt von 25 zu 28, wenn man der arithmetischen Reihe gemäß steigt, durch 3 Stuffen, wo 28 von 25 um diese drey, und 27 von 25 um zwey solcher Stufen entfernt ist. Da nun des nten Gliedes u Entfernung von 25, $\frac{2}{3}$ so viel, als die Entfernung des Gliedes 28 von 25 beträgt, so ist klar, daß, da man in der Reihe von 25 zu 27 durch zwey Stuffen gelangt, dergleichen 25 von dem in der Reihe zunächst folgenden Gliede um drey abstehet; 27 das gesuchte nte, oder $8\frac{2}{3}$te Glied in der Reihe ist, wie sich aus der Gleichung ergab.

Kommt man also auf einen Werth von n, der $= b + \frac{m}{q+1}$, so daß $m < q + 1$, so ist die Bedeutung hievon eigentlich diese: das gegebene Glied u ligt zwischen dem bten und $b+1$ten Gliede der schon bestimmten Reihe, und wenn man zwischen diesen beyden Gliedern q mittlere Proportionalzahlen sucht, so ist das mte Glied von diesen das gegebene, also in der bestimmten Reihe das nte.

Oder:

Oder: man stelle sich dieses auch auf folgende Weise vor: Jede arithmetische Progression läßt sich in eine andere von mehreren Gliedern verwandlen, so daß die vorhandenen Glieder alle stehen bleiben, wenn man nemlich vor jedes Glied andere Zahlen sezt, die mit den schon vorhandenen eine einzige arithmetische Progression ausmachen. Kommt man also auf einen Werth von n, der $= b + \frac{m}{q+1}$, so kann man allemal vor jedes Glied der Reihe, deren Gestalt schon bestimmt ist, noch q Glieder setzen, die mit den schon vorhandenen in einer arithmetischen Progression fortgehen. Auf diese Weise wird obige Reihe nun in nachfolgende verwandelt:

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28;

hier ist 4 das dritte, und oben das 1ste; 7 ist das sechste und oben das zweyte; 10 das neunte und oben das dritte, u. s. f. überhaupt das nte oben, ist hier das 3nte Glied: folglich das $8\frac{2}{3}$te oder $\frac{26}{3}$te oben, hier das 26ste. Auf diese Art wird begreiflich, was n eigentlich bedeute, wenn es ein uneigentlicher Bruch ist.

§. 245.

Formeln für die arithmetische Reihen.

Bey einer arithmetischen Reihe kommen 5 Stücke in Betrachtung: das erste Glied a; die Differenz $= d$; die Anzahl der Glieder $= n$; das lezte Glied (oder im vorkommenden Falle das nte Glied) u; die Summe von n Gliedern s: und diese sind so beschaffen, daß man zu drey gegebenen jedesmal die zwey

übrigen durch eine blosse Substitution finden kann, wenn man einmal folgende 20 Formeln entwickelt hat, welche theils zwar oben vorgekommen sind, aber um der Vollständigkeit willen hier wiederholt und mit ans dern vermehrt werden.

I. $u = a + dn - d$ folgt unmittelbar aus dem Bau der arithmetischen Progression, §. 52.

II. $a = u + d - dn$
III. $d = \frac{u - a}{n - 1}$
IV. $n = \frac{u + d - a}{d}$
} fliessen aus Nro. I.

V. $s = \frac{an + un}{2}$ fließt ebenfalls aus dem Bau der arithmetischen Progression unmittelbar. S. §. 52.

VI. $a = \frac{2s}{n} - u$
VII. $u = \frac{2s}{n} - a$
} fliessen aus Nro V.

VIII. $n = \frac{2s}{a + u}$

IX. $s = \frac{2an + dn^2 - dn}{2}$; wenn man in Nro. V. statt u den Werth aus Nro. I. substituirt.

X. $a = \frac{2s + dn - dn^2}{2n}$
XI. $d = \frac{2s - 2an}{n^2 - n}$
} fliessen aus Nro. IX.

XII. $n = \frac{1}{2} - \frac{a}{d} + \sqrt{\left(\frac{2s}{d} + \frac{a^2}{d^2} - \frac{a}{d} + \frac{1}{4}\right)}$

XIII.

XIII. $s = \frac{2un - dn^2 + dn}{2}$; wenn man in Nro. V. den Werth statt a aus Nro. II. substituirt.

XIV. $d = \frac{2un - 2s}{n^2 - n}$

XV. $u = \frac{2s + dn^2 - dn}{2n}$

XVI. $n = \frac{1}{2} + \frac{u}{d} + \gamma\left(\frac{u^2}{d^2} + \frac{u}{d} + \frac{1}{4} - \frac{2s}{d}\right)$

} fliessen aus Nro. XIII.

XVII. $s = \frac{ad + ud + u^2 - a}{2d}$; wenn man in Nro. V. statt n den Werth aus Nro. IV. substituirt.

XVIII. $a = \frac{1}{2}d + \gamma(u^2 + ud + \frac{1}{4}d^2 - 2ds)$

XIX. $u = -\frac{1}{2}d + \gamma(a^2 - ad + \frac{1}{4}d^2 + 2ds)$

} fliessen aus Nro. XVII.

XX. $d = \frac{u^2 - a^2}{2s - a - u}$

Um nun den Werth für jede gesuchte Grösse desto leichter aus den gegebenen zu finden, lässet sich folgende Tafel formiren:

zu finden	gegeben	Formeln.
a	u, d, n	$a = u + d - dn$
	u, n, s	$a = \frac{2s}{n} - u$
	u, d, s	$a = \frac{1}{2}d + \gamma(u^2 + ud + \frac{1}{4}d^2 - 2ds)$
	d, n, s	$a = \frac{2s + dn - dn^2}{2n}$

zu finden	gegeben	Formeln.
	a, u, n	$d=\frac{u-a}{n-1}$
	a, n, s	$d=\frac{2s-2an}{n^2-n}$
	a, u, s	$d=\frac{u^2-a^2}{2s-u-a}$
	u, n, s	$d=\frac{2un-2s}{n^2-n}$
	a, u, d	$n=1+\frac{u-a}{d}$
	a, u, s	$n=\frac{2s}{a+u}$
n	a, d, s	$n=\frac{1}{2}-\frac{a}{d}+\sqrt{(\frac{2s}{d}+\frac{a^2}{d^2}-\frac{a}{d}+\frac{1}{4})}$
	u, d, s	$n=\frac{1}{2}+\frac{u}{d}+\sqrt{(\frac{u^2}{d^2}+\frac{u}{d}+\frac{1}{4}-\frac{2s}{d})}$
	a, d, n	$u=a+dn-d$
	a, n, s	$u=\frac{2s}{n}-a$
u	a, d, s	$u=-\frac{1}{2}d+\sqrt{(2ds+a^2-ad+\frac{1}{4}d^2)}$
	d, n, s	$u=\frac{s}{n}+\frac{dn-d}{2}$

zu finden	gegeben	Formeln.
s	a, u, n	$s = \frac{an + un}{2}$
	a, d, n	$s = \frac{2an + dn^2 - dn}{2}$
	a, d, u	$s = \frac{a+u}{a} + \frac{u^2 - a^2}{2d}$
	u, d, n	$s = \frac{2un + dn - dn^2}{2}$

§. 246.

Man kann den allgemeinen Ausdruck für die Summe

$$s = \frac{2an + dn^2 - dn}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}dn^2 + \left(\frac{2a - d}{2}\right)n$$

auch aus anderen Gründen herleiten.

Man kann den Ausdruck für die Summe $s = An + Bn^2$ setzen. Man kann nemlich annehmen, daß die Summe von n Gliedern erhalten werde, wenn das nte Glied mit einer gewissen Function von n, die man mit fn bezeichnen kann, multiplicirt wird. Es kann demnach

$$s = (a + dn - d)\,fn$$

*) Es ist nemlich $a + (n-1)d$ oder $a + nd - d$ die Formel für ein jedes ntes Glied. (§. 52. n. 2.)

$$= (af - df)\,n + dfn^2$$

angenommen werden. (f muß nemlich eine solche Grösse seyn, daß dieser Ausdruck die Summe von n Gliedern gebe.)

Sezt man nun

$$(af - df) = A$$
$$df = B$$

so erhält man

$$s = An + Bn^2$$

für die Summe von n Gliedern.

*) Eben so kann man für die Summe von (n—1) Gliedern, welche Summe man mit s^1 bezeichnen kann, folgenden Ausdruck annehmen:

$$s^1 = A.(n-1) + B.(n-1)^2$$
$$= An - A + Bn^2 - 2Bn + B$$

Es ist aber jedes Glied gleich der Summe aller Glieder, weniger der Summe aller vorhergehenden Glieder, (z. B. das 5te Glied ist gleich der Summe von 4 Gliedern) Also ist auch das nte Glied gleich der Summe von n Gliedern, weniger der Summe von (n—1) Gliedern;

oder $u = s - s^1$

oder, wenn man für u, s, und s^1 ihre Werthe sezt:

$$a + dn - d = (An + Bn^2) - (An - A + Bn^2 - 2Bn + B)$$
$$= A + 2Bn - B$$

Reduciret man diese Gleichung gehörig, und bringt alle Glieder auf eine Seite, so ist

$$0 = (A - B - a + d) + (2B - d)n$$

folglich

$$A - B - a + d = 0$$

und auch

$$2B - d = 0 \text{ (Nach §. 233.)}$$

und es kommt

$$B = \tfrac{1}{2}d$$
$$A = a - \tfrac{1}{2}d$$

Es

Es ist also die Summe von n Gliedern, nemlich

$$s = (a - \tfrac{1}{2}d).n + \tfrac{1}{2}dn^2 = \frac{2an - dn + dn^2}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}dn^2 + (\frac{2a - d}{2}).n \quad \text{wie oben.}$$

*) Man kann die Grössen A und B auch auf folgende Art bestimmen:

Das nte Glied ist einmal $s - s^1 = A + 2Bn - B$, (wie so eben gezeigt worden). Sezt man nun $n = 1$, so erhält man das erste Glied der Reihe $= A + B$; sezt man $n = 2$, so kommt das zweyte Glied der Reihe $= A + 3B$. Nun aber ist in der Formel das erste Glied $= a$, das zweyte $= (a + d)$: folglich

$$A + B = a \text{ nemlich } A = a - B = a - \tfrac{1}{2}d = \frac{2a - d}{2}$$

$$A + 3B = a + d \ldots\ldots B = \tfrac{1}{2}d$$

$$\text{und } s = (\frac{2a - d}{2})\, n + \tfrac{1}{2}dn^2.$$

§. 247.

Als Anwendung dieser Formeln mögen noch folgende Aufgaben dienen:

*) Man soll zwischen 10 und 20 noch vier Glieder einschalten, so daß alle 6 Glieder sodann eine arithmetische Progression ausmachen.

Aufl. Hier ist demnach die Differenz nach der ersten Formel zu bestimmen: $d = \frac{u - a}{n - 1}$

weil $a = 10$; $u = 20$; $n = 6$, so ist

$$d = \frac{20 - 10}{6 - 1} = 2 \text{ folgl.}$$

die gesuchte Reihe $= 10, 12, 14, 16, 18, 20$.

*) Man läßt von einer Höhe, z. B. von einem Thurm, einen Körper frey herunterfallen: nun ist aus der Naturlehre bekannt, daß jeder freyfallende Körper in der ersten Sekunde ungefehr 15 Schuhe, und in jeder darauf folgenden Sekunde um 30 Schuhe mehr, als in der vorhergehenden zurücklege: wenn nun die bey dem vorgegebenen Falle beobachtete Zeit 8 Sekunden beträgt; so fragt sich, wie groß diese Höhe sey.

Aufl. Es sind bekannt, $a=15$; $d=30$; $n=8$; und es ist s zu suchen.

$$s=\frac{2an+dn^2-dn}{2}$$

$$=\frac{240+1920-240}{2}$$

$=960$ Schuhe.

*) Ein Körper ist von einer Höhe von 240 Schuhen frey herunter gefallen, in wie viel Zeit ist solches geschehen?

Aufl. Diese Zeit gibt uns die dritte Formel von n, da $a=15$; $d=30$; $s=240$ bekannt sind. Nemlich

$$n=\tfrac{1}{2}-\tfrac{15}{30}+\sqrt{(\tfrac{480}{30}+\tfrac{225}{900}-\tfrac{15}{30}+\tfrac{1}{4})}$$

$$=\sqrt{(16+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4})}=16.$$

*) Man soll die Summe der ersten m ungeraden Zahlen finden, 1 für die erste genommen.

Auflösung.

Die Reihe ist also: $1, 3, 5, 7 \ldots 2m-1$ und hier ist $a=1$; $u=2m-1$; $n=m$; $d=2$.

also für $S=(\frac{a+u)n}{2}$ kommt $(\frac{1+(2m-1)m}{2})$

$$=\frac{2m.m}{2}=m^2$$

Das

Das ist: Die Summen der ersten zwey, drey, vier, fünf, u. s. f. ungeraden Zahlen, sind die Quadrate von 2, 3, 4, 5 u. s. w.

Dieses zeigt ferner:

1.) Wie man die Quadrate durch fortgesetztes Addiren der ungeraden Zahlen finde.

2.) Wie man auch aus einem Quadrat das folgende finde.

Z. B. Man hat m^2

so ist $(m+1)^2 = m^2 + 2m + 1$

oder man addirt zum Quadrate die $(m+1)$te ungerade Zahl.

Z. B. Wenn $m = 1000$, so ist das Quadrat davon 1000000, die Summe der ersten 1000 ungeraden Zahlen; davon die lezte $= 2000 - 1$ ist. Die nächstfolgende also ist $2000 + 1$ und von 1001 ist das Quadrat 1002001; dazu 2003 addirt, gibt 1004004 als das Quadrat von 1002 u. s. w.

§. 248.

Lehrsatz.

In einer arithmetischen Progression verhält sich die Differenz der Summe des ersten und lezten Glieds von der doppelten Summe der Progression, zur Differenz des ersten und lezten Gliedes; wie die Summe des ersten und lezten Gliedes zur Progressional-Differenz.

Beweis.

Diese Eigenschaft fließt unmittelbar aus der

Formel: $$d = \frac{u^2 - a^2}{2s - (a+u)}.$$

denn diese gibt die Proportion

$$2s - (a+u) : u - a = u + a : d$$

§. 249.

Lehrsatz.

In einer arithmetischen Reihe, welche von 1 anfangt, und nach der Differenz 1 fortgehet, verhält sich die Summe zum Produkt des lezten Gliedes in die Zahl der Glieder, wie 1 zu 2.

Beweis. Die Summe ist $= (1+n)\frac{n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$

das Produkt $= n.\,n = n^2$

folgl. Summe: Produkt $= \frac{n^2+n}{2} : n^2$

$= 1+n : 2n$

und, weil 1 gegen dem unendlich grossen n verschwindet, $= n : 2n$

$= 1 : 2$

Polygonalzahlen.

§. 250.

Es ist aus dem I. Abschn. 4. Kap. bekannt, wie die Summe einer arithmetischen Progression gefunden werde. Wenn nemlich d = Differenz, n = Zahl der Glieder, und a = erstes Glied, welches man hier als 1 annimmt; so ist

das lezte Glied $= 1 + (n-1)d$

hiezu das erste Glied addirt, gibt $2 + (n-1)d$

und mit der halben Zahl der Glieder $\frac{n}{2}$ multiplicirt,

kommt die Summe $n + \frac{n(n-1)d}{2}$

Wenn

Wenn nun a = 1, so kommen bey folgenden Differenzen folgende Summen:

	Summe	
d = 1	$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$	DreyEck.
d = 2	$n + \frac{2n(n-1)}{2} = n^2$	VierEck.
d = 3	$n + \frac{3n(n-1)}{2} = \frac{3n^2-n}{2}$	FünfEck.
d = 4	$n + \frac{4n(n-1)}{2} = 2n^2-n$	SechsEck.
d = 5	$n + \frac{5n(n-1)}{2} = \frac{5n^2-3n}{2}$	SiebenEck.
d = 6	$n + \frac{6n(n-1)}{2} = 3n^2-2n$	AchtEck.
d = 7	$n + \frac{7n(n-1)}{2} = \frac{7n^2-5n}{2}$	NeunEck.
d = 8	$n + \frac{8n(n-1)}{2} = 4n^2-3n$	ZehnEck.
d = 9	$n + \frac{9n(n-1)}{2} = \frac{9n^2-7n}{2}$	EilfEck.
d = 10	$n + \frac{10n(n-1)}{2} = 5n^2-4n$	ZwölfEck.
d = 18	$n + \frac{18n(n-1)}{2} = \frac{18n^2-16n}{2}$ oder $9n^2-8n$	ZwanzigEck.
	und allgemein: $\frac{(m-2)n^2-(m-4)n}{2}$	m Eck.

§. 251.

§. 251.

Die Seite einer Polygonalzahl ist die Zahl der Glieder einer arithmetischen Progression, welche summirt werden.

Die **Winkelzahl** heißt die Zahl, welche anzeigt, wie viele Winkel eine Polygonalzahl habe, wenn man sie in einer regulären Figur beschreibet; woher sie auch selbst den Namen hat.

Es sey

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9 ꝛc.
Arith. Progr.	1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	22,	25 ꝛc.
FünfEck	1,	5,	12,	22,	35,	51,	70,	92,	117 ꝛc.

oder:

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9 ꝛc.
Arith. Progr.	1,	5,	9,	13,	17,	21,	25,	29,	33 ꝛc.
Sechseck	1,	6,	15,	28,	45,	66,	91,	120,	153 ꝛc.

Der Zeiger weiset die Seite eines jeden Vielecks.

Und die Winkelzahl ist in den DreyEcken 3, den FünfEcken 5, den SechsEcken 6 u. s. w.

Und sie übersteiget die Differenz der Glieder, welche summirt werden, jedesmal um 2. Z. B. beym FünfEck ist die Winkelzahl 5, und die Differenz der Glieder 3; beym SechsEck Winkelzahl 6, Differenz 4.

§. 252.

Ferner, aus der vorigen allgemeinen Formel fließt: Eine **Polygonalzahl** ist die halbe Differenz der Produkte aus dem Quadrat der Seite in die um 2 Einheiten verminderte Zahl der Winkel, und aus der Seite selbst in die um 4 Einheiten verminderte Zahl der Winkel.

*) Sie

*) Sie wurde oben nur aus Induktion angeführt; sie läßt sich aber auch unmittelbar also finden: Es sey

die Zahl der Winkel $= m$; die Seite $= n$;

die Differenz der Glieder $= m - 2$ (S. obigen §.)

das erste Glied $= 1$;

das lezte Glied (nach dieser Benennungsart)

$= 1 + (m-2)(n-1)$

die Summe des ersten und lezten

$= 2 + (m-2)(n-1)$

$4 + nm - 2n + m$

dieses mit der halben Zahl der Glieder $\frac{n}{2}$ multiplicirt gibt

$$\frac{4n + n^2m - 2n^2 - mn}{2}$$

oder $\frac{n^2(m-2) - n(m-4)}{2}$

Z. B. Man soll die 6te Trigonalzahl finden; so ist $n = 6$, $m = 3$.

Sie ist nach der Formel $\frac{36.(3-2) - 6(3-4)}{2}$

$= \frac{36 + 6}{2} = 21$

Reml. Progr. Arithm. 1, 2, 3, 4, 5, 6

Trigonalzahlen 1, 3, 6, 10, 15, 21

*) Man soll die 8te Pentagonalzahl finden; so ist $n = 8$; $m = 5$.

Sie ist $= \frac{64(5-2) - 8(5-4)}{2}$

$= \frac{64.3 - 8}{2} = 92$

Nemlich Progr. Arithm. 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22
Pentagonalzahl 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92.

§. 253.

Aufgabe.

Man soll aus der gegebenen Polygonalzahl und der Zahl der Glieder die Seite finden.

Auflösung. Polygonalzahl = p; Zahl der Winkel = m; Seite = n.

Polygonalzahl = (erstes und leztes Glied) $\left(\frac{\text{Zahl der Glieder}}{2}\right)$.

$$p = (1 + \text{lezt. Gl.})\frac{x}{2}$$

leztes Glied = $1 + (x - 1)$ Differenz.
Differenz = $m - 2$
leztes Glied = $1 + (x-1)(m-2) = 3 + mx - 2x - m$

$$p = (1 + 3 + mx - 2x - m)\frac{x}{2}$$

$$2p = 4x + mx^2 - 2x^2 - mx$$
$$mx^2 - 2x^2 + 4x - mx = 2p$$

$x^2 + \left(\frac{4-m}{m-2}\right)x = \frac{2p}{m-2}$. Es sey $\frac{4-m}{2-m} = r$

$$x^2 + rx = \frac{2p}{m-2}$$

$$x^2 + rx + \frac{r^2}{4} = \frac{2p}{m-2} + \frac{r^2}{4}$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{2p}{m-2} + \frac{r^2}{4}\right)} + \frac{r^2}{4}$$

für

für r wieder substituirt:

$$x=\sqrt{[8p(m-2)+16-8m+m^2]}+\frac{m-4}{2m-4}$$

$$x=\frac{m-4+\sqrt{8p(m-2)+(m-4)^2}}{2m-4}$$

Regel. Die gesuchte Zahl ist ein Quotient; und zwar ist

1.) der Dividend die Summe aus einer Rational- und Irrationalzahl

a.) die Rationalzahl ist die Zahl der Winkel — 4

b.) die Irrationalzahl ist die Summe aus einem Produkt und Quadrat.

α.) das Produkt ist die Polygonalzahl 8mal genommen, multiplicirt in die Zahl der Winkel — 2.

β.) das Quadrat entstehet aus der Rationalzahl.

2.) Der Divisor ist die Zahl der Winkel — 2, zweymal genommen.

Z. B. Wenn 21 eine Trigonalzahl ist, so soll man die Seite finden.

$$\text{die Seite}=\frac{3-4+\sqrt{21.8(3-2)+(3-4)^2}}{(3-2)^2}=6$$

die Trigonalzahl 21 ist also aus 6 Gliedern entstanden.

Progr. Arithm. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Trigonalzahl 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28

*) Wenn 45 eine Hexagonalzahl ist, so soll man die Seite finden.

$$\text{die Seite}=6-4+\sqrt{45.8(6-2)+(6-4)^2}=5.$$

Die Hexagonalzahl 45 ist also aus 5 Gliedern entstanden; nemlich

Progr. 1, 5, 9, 13, 17
Hexagonalzahl 1, 6, 15, 28, 45

Wenn aber die Wurzel sich nicht ausziehen läs-set, so ist die angenommene Zahl eine falsche Polygonalzahl.

§. 254.

Eine Pronikzahl entstehet, wenn man zu einem Quadrat seine Wurzel addirt. Z. B. $4 + 2 = 6$. so ist 6 die Pronikzahl. $25 + 5 = 30 =$ Pronikzahl. Oder allgemein: $n^2 + n$ ist eine Pronikzahl.

Weil aber $n^2 + n = (n + 1)n$, so folget, daß das Produkt zweyer in natürlicher Ordnung auf einander folgenden Zahlen jedesmal eine Pronikzahl sey. Z. B. 2.3; 4.5; 7.8 u. s. w. sind lauter Pronikzahlen. Z. B. $7.8 = 56 = 49 + 7$.

§. 255.

Uebrigens sind obige §. 250. gefundene Formeln sehr fruchtbar. Z. B. die Formel für die Triangularzahl ist $\frac{n^2 + n}{2}$, wo n der Triangularzahl Seite oder Wurzel ist. Man heisse nun die nte Triangularzahl $= T$, so ist

$$T = \frac{n^2 + n}{2}$$

hieraus findet man n

$$2T = n^2 + n$$
$$2T + \tfrac{1}{4} = n^2 + n + \tfrac{1}{4}$$
$$\sqrt{(2T + \tfrac{1}{4})} = n + 1$$
$$-1 + \sqrt{(2T + \tfrac{1}{4})} = n$$
$$-1 + \sqrt{(8T + 1)} = n$$

Weil

Weil nun n allemal eine Rationalzahl ist, so muß auch $\sqrt{(8T+1)}$ rational, mithin $8T+1$ allemal eine Quadratzahl seyn.

Hieraus folgt ferner, daß auch $\frac{8(n^2+n)}{2}+1$ d. i. $4(n^2+n)+1$, oder jede vierfache Pronikzahl zu 1 addirt, ein Quadrat hervorbringt.

Differenzenreihen und ihre Anwendung.

§. 256.

Das allgemeinste Mittel, das Gesez zu finden, nach welchem die Glieder einer Reihe fortgehen, ist dieses, daß man die Differenz der Glieder nimmt, sodann in dieser Differenzreihe abermal die Differenz der Glieder bemerkt, und solchergestalt fortfährt, bis man auf eine Differenzreihe kommt, in welcher alle Glieder einander gleich sind. Durch dieses Mittel, oder die leztgefundene immer wiederkommende gleiche Differenz kann man nun die Hauptreihe durch bloses Addiren so weit fortsezen, als man will.

Gewöhnlich benennt man solche Differenzen durch Δ oder d, und zwar die erste durch Δ' oder d'; die Differenzen der zweyten Reihe, oder Differenzen der Differenzen durch Δ'' oder d''; die dritte Differenzen durch Δ''' oder d''' u. s. f.

Z. B. Es sey die Hauptreihe (Series Primitiva)

2, 9, 24, 50, 90 ... so ist

d' = 7, 15, 26, 40

d'' = 8, 11, 14

d''' = 3, 3.

hier gibt demnach schon die dritte Differenzreihe eine beständige Differenz.

Es sey die Reihe:

0, 10, 68, 234, 592, 1250. ....
10, 58, 166, 358, 658
48, 108, 192, 300
60, 84, 108
24, 24.

hier wird erst in der vierten Differenzreihe die Differenz beständig.

Ferne sey es aber, sich vorzustellen, als ob man nun solchergestalt im Stande sey, für jede vorgelegte Reihe sogleich ein allgemeines Mittel zu entdecken, die folgende Glieder zu berechnen.

So hat man bis jetzo noch kein Mittel gefunden, nur die Glieder der Reihe, welche die Primzahlen ausmachen, durch eine allgemeine Berechnung zu finden.

*) Die neueste hieher gehörige und wichtige Schrift ist:

Hrn. Carl Fr. Hindenburgs Beschreibung einer ganz neuen Art, nach einem bekannten Gesetze fortgehende Zahlen durch Abzählen oder Abmessen zu finden. 8. Leipz. 1776.

§. 257.

Nun sey die Hauptreihe $y, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ u. s. w. man suche die Differenzreihen.

Haupt-reihe.	Iste Differenzen-reihe.	IIte Differenzen-reihe.	IIIte Differenzenreihe.	IVte Differenzenreihe.
y				
	$y_1 - y$			
y_1		$y_2 - 2y_1 + y$		
	$y_2 - y_1$		$y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y$	
y_2		$y_3 - 2y_2 + y_1$		$y_4 - 4y_3 + 6y_2 + 4y_1 + y$
	$y_3 - y_2$		$y_4 - 3y_3 + 3y_2 - y_1$	
y_3		$y_4 - 2y_3 + y_2$		$y_5 - 4y_4 + 6y_3 + 4y_2 + y_1$
	$y_4 - y_3$		$y_5 - 3y_4 + 3y_3 - y_2$	
y_4		$y_5 - 2y_4 + y_3$		
	$y_5 - y_4$			
y_5				

Oder, allgemeiner ausgedrückt:

$$
\begin{array}{llllll}
L & M & N & O & P & Q \\
M & N & O & P & Q & R \\
N & O & P & Q & R & \text{etc.} \\
O & P & Q & R & \text{etc.} & \\
P & Q & R & \text{etc.} & & \\
Q & R & \text{etc.} & & & \\
R & \text{etc.} & & & &
\end{array}
$$

Hauptreihe.

$$
\begin{array}{llllll}
L & M & N & O & P & Q \\
L+M & M+N & N+O & O+P & P+Q & Q+R \\
L+M & L+2M+N & M+2N+O & N+2O+P & O+2P+Q & P+2Q+R \\
L+M & L+3M+3N+O & M+3N+3O+P & N+3O+3P+Q & O+3P+3Q+R & \text{etc.} \\
L+M & L+4M+6N+4O+P & M+4N+6O+4P+Q & N+4O+6P+4Q+R & \text{etc.} & \\
L+M & L+5M+10N+10O+5P+Q & M+5N+10O+10P+5Q+R & \text{etc.} & & \\
L+M & L+6M+15N+20O+15P+6Q+R & \text{etc.} & & &
\end{array}
$$

erste summirende Reihe.

$$
\begin{array}{llllll}
L & M & N & O & P & Q \\
L+M & M+N & N+O & O+P & P+Q & Q+R \\
L+2M+N & M+2N+O & N+2O+P & O+2P+Q & P+2Q+R & \text{etc.} \\
L+3M+3N+O & M+3N+3O+P & N+3O+3P+Q & O+3P+3Q+R & \text{etc.} & \\
L+4M+6N+4O+P & M+4N+6O+4P+Q & N+4O+6P+4Q+R & \text{etc.} & & \\
L+5M+10N+10O+5P+Q & M+5N+10O+10P+5Q+R & \text{etc.} & & & \\
L+6M+15N+20O+15P+6Q+R & \text{etc.} & & & &
\end{array}
$$

zweite summirende Reihe.

Aus

Aus dem Anblick der Tafel erhellet:

I.) Daß die Coefficienten der Differenzreihen mit den BinomialCoefficienten einerley sind. Z. B. $(a+b)^2$ oder die zweyte Potenz von $a+b$ neml. $a^2+2ab+b^2$ hat zu Coefficienten 1; 2; 1; so wie auch die 2te Differenz, z. B. $N-2M+L$ oder $Q-2P+O$; die 3te Potenz von $a+b$, neml. a^3+3a^2b+ $+3ab^2+b^3$ hat zu Coefficienten 1; 3; 3; 1; so wie auch die 3te Differenzen, z. B. $O-$ $-3N+3M-L$; oder $R-3Q+3P-O$ u. s. w.

II.) Die höheren Differenzreihen entstehen durch die Subtraktion der correspondirenden niederen Reihe von dem unmittelbar vorhergehenden Gliede. Z. B. der 2ten Differenzreihe erstes Glied ist $N-2M+L=N-M-(M-L)$ oder $O-3N+3M-L=O-2N+M-$ $-(N-2M+L)$.

Oder: $L=L$
$d' = M-L$
$d'' = N-2M+L$
$d''' = O-3N+3M-L$
$d'''' = P-4O+6N-4M+L$

III.) Durch die Addition zweyer ersten Glieder zweyer nächsten Reihen wird das zweyte Glied der ersteren Reihe gefunden. Z. B. $L+$ $+(M-L)=L$; oder $N-2M+L+$ $+(O-3N+3M-L)=O-2N+M$ u. s. w.

IV.) Die Summe aller ersten Glieder mit den Binomial: Coefficienten drückt das gegebene Glied der Hauptreihe aus. Z. B. das vierte

Glied der Hauptreihe O, wird durch die Summe der vier ersten Glieder der Reihen mit den BinomialCoefficienten ausgedrückt: $O = L + 3(M-L) + 3(N-2M+L) + (O-3N+3M-L)$ Eben so erhellet es auch bey P, Q, R.

$L = L$
$M = L + d'$
$N = L + 2d' + d''$
$O = L + 3d' + 3d'' + d'''$
$P = L + 4d' + 6d'' + 4d''' + d''''$

V. Nun nehme man noch an:

1.) die Glieder der Hauptreihe L, M, N, O ꝛc. heissen y, y1, y2, y3, y4 u. s. w. bis yn; da die Zahlen die Stellen der Glieder bedeuten.

2.) die erste Differenzreihe heisse $\Delta 1$; und ihre Glieder $M-L$, $N-M$ ꝛc. werden durch $1\Delta 1$; $2\Delta 1$; $3\Delta 1$; $4\Delta 1$ u. s. w. bezeichnet.

3.) die zweyte Differenzreihe heisse $\Delta 2$, und ihre Glieder $1\Delta 2$; $2\Delta 2$; $3\Delta 2$; $4\Delta 2$ u. s. w. so werden wir uns in folgenden zweyen Hauptlehrsätzen desto geschmeidiger ausdrücken können.

§. 258.

Lehrsatz.

Ein jedes Glied der Differenzreihen läßt sich durch eine allgemeine Reihe aus den Gliedern der Hauptreihe ausdrücken.

Oder

$$1\Delta n = yn - \frac{n.yn-1}{1} + \frac{n.n-1}{1.2} yn-2$$

Beweis.

Beweis.

$1\Delta 1 = y1 - y$ und
$2\Delta 1 = y2 - y1$ nach dem vorigen §. n. II.
wenn man nun subtrahirt, so ist
$2\Delta 1 - 1\Delta 1 = y2 - 2y1 + y$
es ist aber ferner, nach eben dem vor. §. n. II.
$2\Delta 1 - 1\Delta 1 = 1\Delta 2$ folglich
$1\Delta 2 = y2 - 2y1 + y$
ferner:
$2\Delta 2 = y3 - 2y2 + y1$
und abermal subtrahirt:
$2\Delta 2 - 1\Delta 2 = y3 - 2y2 + y1 - (y2 - 2y1 + y)$
$= y3 - 3y2 + 3y1 - y$
$2\Delta 2 - 1\Delta 2 = 1\Delta 3$ §. cit. folglich
$1\Delta 3 = y3 - 3y2 + 3y1 - y$
ferner:
$2\Delta 3 = y4 - 3y3 + 3y2 - y1$
und abermal subtrahirt:
$2\Delta 3 - 1\Delta 3 = 1\Delta 4 = y4 - 4y3 + 6y2 - 4y1 + y$

daher alles allgemein

(Weil in dem Newtonischen Binomium die Coefficienten, wenn der Exponent n ist, folgende sind: $1; \frac{n}{1}; \frac{n.n-1}{1.2}; \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$ u. s. w.)

$$1\Delta n = yn - nyn-1 + \frac{n.n-1}{1.2} yn-2 \ldots\ldots$$

Zusatz.

Weil $1\Delta n = yn - nyn-1 + \frac{n.n-1}{1.2} yn-2$

$$\text{und } 2\Delta n = yn+1 - nyn + \frac{n.n-1}{1.2} yn-1 \ldots$$

so ist auch

$$2\Delta n - 1\Delta n = 1\Delta n + 1$$
$$= yn+1(n+1)yn+(n+1)nyn-1.$$

§. 259.

Lehrsatz.

Ein jedes Glied der Hauptreihe läßt sich durch eine Reihe aus den Gliedern der Differenzreihen bestimmen.

Oder

$$yn = y + A1\Delta 1 + B1\Delta 2 + C1\Delta 3 \ldots. + R1\Delta r$$

Beweis.

Nr. I. $y1 = y + 1\Delta 1$

$y2 = y1 + 2\Delta 1$

aber $2\Delta 1 = 1\Delta 1 + 1\Delta 2$ (§. 257. n. III.)

$y2 = y1 + 1\Delta 1 + 1\Delta 2$

$y1 = y + 1\Delta 1$

$y2 = y + 2.1\Delta 1 + 1\Delta 2$

Nr. II. $y3 = y2 + 3\Delta 1$

$3\Delta 1 = 2\Delta 1 + 2\Delta 2$

$2\Delta 1 = 1\Delta 1 + 1\Delta 2$

nun substituirt:

$y3 = y2 + 1\Delta 1 + 1\Delta 2 + 2\Delta 2$

$2\Delta 2 = 1\Delta 2 + 1\Delta 3$

$y3 = y2 + 1\Delta 1 + 1\Delta 2 + 1\Delta 2 + 1\Delta 3$

$= y2 + 1\Delta 1 + 2.1\Delta 2 + 1\Delta 3$

es ist aber nach nr. I.

$y2 = y + 2.1\Delta 1 + 1\Delta 2$

folgl.

folgl. $y3 = y + 3.1\Delta1 + 3.1\Delta2 + 1\Delta3$

folgl. allgemein, wenn man für die Binomial-Coefficienten A, B, C, D u. s. w. sezt

$$yn = y + A.1\Delta1 + B.1\Delta2 + C.1\Delta3 \ldots$$
$$\ldots + R.1\Delta r + S.1\Delta r + 1 \ldots$$

Zusaz.

Also ist auch $yn + 1 = y2 + A.2\Delta1 +$
$+ B.2.\Delta2 \ldots + R.2\Delta r$ weil die Lage von $yn + 1$ gegen die zweyte Glieder der Reihe einerley ist mit der Lage yn gegen die erste Reihe der Glieder.

S. Clemms, Mathematisches Lehrbuch. §. 1001 - 1007.

§. 260.

Beyspiele.

I.) Wenn wir uns demnach der Formel bedienen:

$$\frac{n}{1}L + \frac{n.n-1}{1.2}d' + \frac{n.n-1.n-2}{1.2}d'' +$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3}d''' \text{ ꝛc.}$$

so sey die Progression:

1 ; 4 ; 9 ; 16 Hauptreihe
3 5 7 erste Diff.R.
2 2 zweyte Diff.R.

so kommt die Summe der ersten n Glieder von der natürlichen Reihe der Quadraten =

$$\frac{n}{1}.1 + \frac{n.n-1}{1.2}.3 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}.2$$

$$= n + 3.\frac{n.n-1}{2} + \frac{n.n-1.n-2}{3}$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

$$= \tfrac{1}{6}.(n+1)(2n+1)$$

II.) Es sey 4; 16; 36; 64 Hauptreihe
12 20 28 erste Diff.R.
8 8 zweyte Diff.R.

$$\frac{n.4}{1} + \frac{12.n.n-1}{1.2} + \frac{8.n.n-1.n-2}{1.2.3}$$

$$= 4n + 6.n.n-1 + \frac{4n.n-1.n-2}{3}$$

$$= \frac{4n^3 + 6n^2 + 2n}{3} = \tfrac{3}{2}n.(n-1)(2n+1)$$

Summe der Quadraten von den ersten n geraden Zahlen.

III.) 1; 9; 25; 49
8 16 25 1. D.R.
8 8 2. D.R.

$$n + 4(n^2 - n) + 4\left(\frac{n^3 - 3n^2 + 2n)}{3}\right.$$

$$= \frac{4n^3 - n}{3}$$

Summe von den Quadraten der ersten n ungeraden Zahlen.

IV.) 1; 8; 27; 64
7 19 37 1. D.R.
12 18 2. D.R.
6 3. D.R.

n +

$$n + 7\left(\frac{n^2 - n}{2}\right) + 2(n^3 - 3n^2 + 2n) +$$
$$+ \left(\frac{n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n}{4}\right)$$
$$= \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$$
$$= \frac{(n^2 + n)^2}{4}$$

Summe der ersten n Cubikzahlen.

V.) 8 64 216 512 1000 Hauptreihe
56 152 296 488 1. Diff. R.
96 144 192 2. Diff. R.
48 48 3. Diff. R.

$$8n + 28(n^2 - n) + 16(n^3 - 3n^2 + 2n) +$$
$$+ 2(n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n) = 2n^4 +$$
$$+ 4n^3 + 2n^2$$

Summe von n Gliedern der Hauptreihe.

VI.) 1; 27; 125; 343; 729 Hauptreihe
26 98 218 386 1. D. R.
72 120 168 2. D. R.
48 48 3. D. R.

$$n + 13(n^2 - n) + 12(n^3 - 3n^2 + 2n) +$$
$$+ 2(n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n)$$
$$= 2n^4 - n$$

Summe von n Gliedern der Hauptreihe.

VII.) 1; 3; 6; 10; 15
2 3 4 5 1. D. R.
1 1 1 2. D. R.

$$n + n^2 - n + \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6}$$

$$= \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}$$

$$= \tfrac{1}{6}n.(n-1)(n-2)$$

die Summe der ersten n Triangularzahlen.

VIII.) 1; 5; 12; 22; 35

4 7 10 13 1. D. R.

3 3 3 2. D. R.

$$n + 2(n^2 - n) + \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2}n.(n+1)$$

die Summe der ersten n fünfeckichten Zahlen.

IX.) 1; 6; 15; 28; 45

5 9 13 17 1. D. R.

4 4 4 2. D. R.

$$n + 5\left(\frac{n^2 - n}{2}\right) + 2\left(\frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{3}\right)$$

$$= \frac{4n^3 + 3n^2 - n}{6}$$

$$= \tfrac{1}{6}n(n+1)(4n-1)$$

Summe der ersten n sechseckichten Zahlen.

§. 261.

Aus den bisherigen Formeln fliessen nun folgende Sätze:

1.) Die Summe irgend einer Anzahl von Gliedern in der Reihe der Quadraten verhält sich

zu

zu der Summe eben so vieler Glieder in der Reihe der Cubikzahlen wie

$(2 + 4n) : (3n^2 + 3n)$

2.) Die Summe einer Anzahl von Gliedern in der Reihe der geraden Quadraten verhält sich zur Summe eben so vieler Glieder in der Reihe der ungeraden, wie

$(2n + 2) : (2n - 1)$

3.) Die Summe einer Anzahl von Gliedern in der Reihe der geraden Cubikzahlen verhält sich zur Summe eben so vieler in der Reihe der ungeraden, wie

$(n + 1)^2 : (2n + \frac{1}{2})$

4.) Die Summe einer Anzahl von Gliedern in der Reihe der Triangularzahlen verhält sich zur Summe eben so vieler Quadratzahlen, wie

$(n + 2) : (n^2 - 1)$

5.) Die Summe mehrerer Glieder in der Reihe der Triangularzahlen verhält sich zur Summe eben so vieler Glieder in der Reihe der Cubikzahlen, wie

$(2n + 4) : (3n^2 + 3n)$

6.) Die Summe mehrerer Glieder in der Reihe der natürlichen Zahlen verhält sich zur Summe eben so vieler Glieder in der Reihe der Cubikzahlen, wie

$2 : (n^2 + n)$

7.) Und zur Summe eben so vieler Glieder in der Reihe der Quadraten, wie

$3 : (2n + 1)$

8.) Triang. Quadr. 5Eck. 6Eck. 7Eck. 8Eck.
$n + 2$; $2n + 1$; $3n$; $4n - 1$; $5n - 2$; $6n - 3$
Die untenstehende Zahlen zeigen die Verhältniß an, welche die Summe einer in einer figurirten Reihe genommenen Anzahl von Gliedern

zur

zur Summe eben so vieler in einer andern figurirten Reihe genommenen Glieder hat.

Wird die Reihe hier rückwärts fortgesezt, so folget $on+3$ zur Verhältnißzahl der natürlichen Zahlen; denn dieser ihre Summe ist $\frac{n.(n+1)}{2}$; die sich also zur Summe eben so vieler Triangularzahlen verhält, wie

$$\frac{n.(n+1)}{2} : [\tfrac{1}{6}n.(n+1)(n+2)]$$

$$= \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{6}(n+2)$$

$$= 3 : (n+2)$$

daß also das in der Reihe hier vor $n+2$ vorhergehende Glied 3 ist.

S. Langsdorf Erläuterung der Käſtneriſchen Analyſis endl. Gröſſen. S. 262-266. Auch Diſſ. Dilucidationes Analyſeos Finitorum Kæſtnerianæ. Præſ. Kies. Reſp. Rappolt. Tub. 1768.

§. 262.

1. Aufgabe.

Man ſoll eine Zahl finden, welche aus der Summe von n Gliedern in einer Triangularreihe entſtehet, und welche ſich zu einer Zahl, die aus einer Reihe eben ſo vieler Glieder n in der Reihe der Quadrate verhält, wie 9 : 17

Aufl.

Aus dem obigen erhellet, daß dieſe Verhältniß iſt

$n+2 : 2n+1$ alſo

$n+2 : 2n+1 = 9 : 17$

$17n+34 = 18n+9$

$n = 25$

2. Aufl.

2. Aufgabe.

Man soll eine Zahl finden, welche aus der Summe von n Gliedern in der Reihe der geraden Cubikzahlen entstehet, und welche sich zu einer Zahl, die aus einer Reihe eben so vieler Glieder n in der Reihe der ungeraden Cubikzahlen verhalte, wie 722 : 647.

Auflösung.

Aus dem Obigen ist klar, daß diese Summen sich unter einander verhalten wie $(n^2+2n+1 : (n^2-\frac{1}{2})$ demnach

$$n^2+2n+1 : n^2-\tfrac{1}{2} = 722 : 647$$
$$647n^2+1294n+647 = 722n^2-361$$
folgl. $$75n^2-1294n = 1008$$
$$n = 18.$$

3. Aufgabe.

Man soll die Verhältniß der Summen der natürlichen: Quadrat: Cubik: und BiquadratzahlenReihen zu einander finden.

Auflösung.

Für die ersteren Reihen sind die Ausdrücke schon oben gefunden worden; man setze nun nur noch

1; 16; 81; 256; 626	Hauptreihe, Biquadrate.
15 65 175 369	1. Diff. R.
50 110 194	2. Diff. R.
60 84	3. Diff. R.
24	4. Diff. R,

Also ist die Summe:

$$n + \frac{15n.n-1}{2} + \frac{50.n.n-1.n-2}{1.2.3} +$$

$$+ \frac{60.n.n-1.n-2.n.-3}{1.2.3.4} +$$

$$+ \frac{24.n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5} =$$

$$= n + \frac{15.n^2-15n}{2} + 25\left(\frac{n^3-32n^2+2n}{3}\right) +$$

$$+ 10\left(\frac{n^4-6n^3+11n^2-6n}{4}\right) +$$

$$+ \frac{n^5-10n^4+35n^3-50n^2-24n}{5} =$$

$$= \frac{12n^5+30n^4+20n^3-2n}{3.4.5}$$

$$= \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{2.3.5}$$

$$= \frac{n.n+1.6n^3+9n^2+n-1}{2.3.5}$$

$$= \frac{n.n+1.2n+1.3n^2+3n-1}{2.3.5}$$

Man erhält also folgende Verhältnisse:

Nat. Z. Quadrat. Z. Cubik. Z.

$$\frac{n.n+1}{2} : \frac{1}{6}n.n+1.2n+1 : \frac{n^2+n.n^2+n}{4} :$$

$$1 : \frac{2n+1}{3} : \frac{n.n+1}{2} :$$

Biquadrat. Z.

$$: \frac{n.n+1.2n+1.3n^2+3n-1}{2.3.5}$$

$$: \frac{2n+1.3n^2+3n-1}{3.5.}$$

Die

Die Summe der 4 ersten Quadratzahlen 30 verhält sich zur Summe der 4 ersten Biquadratzahlen 354 wie 5 zu $3n^2 + 3n - 1 = 5 : 59$.

§. 263.

Nun sollen aber auch einzelne Glieder der Reihen gesucht werden. Nach obigem ist

$$P = L + 4d' + 6d'' + 4d''' + d''''$$

also überhaupt das nte Glied

$$L + \frac{n-1}{1} d' + \frac{n-1 . n-2}{1.2} d'' +$$

$$+ \frac{n-1 . n-2 . n-3}{1.2.3} d''' +$$

$$+ \frac{n-1 . n-2 . n-3 . n-4}{1.2.3.4} d''''$$

Es sey folgende Reihe:

1	— 1	0	8	27	61	114	190
	— 2	1	8	19	34	53	76 1ste Diff.
		3	7	11	15	19	23 2te Diff.
			4	4	4	4	4 3te Diff.

es wird also das nte Glied seyn

$$1 - 2(n-1) + 3\left(\frac{n-1 . n-2}{1.2}\right) +$$

$$+ 4\left(\frac{n-1 . n-2 . n-3}{1.2.3}\right)$$

es sey $n = 6$, so wird das 6te Glied in der vorgegebenen Reihe seyn

$$1 - 10 + 30 + 40 = 61$$

so wird in der Reihe der Trigonalzahlen, wo $d' = 2$, $d'' = 1$, das Generalglied seyn:

$$1 + 2(n-1) + \left(\frac{n-1 . n-2}{2}\right);$$

es sey $n = 5$, so wird das 5te Glied $= 1 + 8 + 6$.

Es sey eine andere, und folgende Reihe gegeben:

$$\begin{aligned}
&1 - 104 - 1749 - 8814 - 27629 - 66812 - 137349 - 212074 - 425949 \\
&- 645 - 7065 - 18815 - 39223 - 70497 - 114725 - 173875 \\
&- 5420 - 1750 - 20408 - 31274 - 44228 - 59150 \\
&- 6330 - 8658 - 10866 - 12954 \\
&- 2328 - 2088 - 2208 - 1968 \\
&+ 120 + 120 + 120
\end{aligned}$$

So wird das allgemeine Glied (Terminus generalis) dieser Reihe seyn:

$$-104-1645\left(\frac{n-1}{1}\right)-5420\left(\frac{n-1.n-2}{1.2}\right)-$$
$$-6330\left(\frac{n-1.n-2.n-3}{1.2.3}\right)$$
$$-2328\left(\frac{n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4}\right)-$$
$$-120\left(\frac{n-1.n-2.n-3.n-4.n-5}{1.2.3.4.5}\right)$$

Es sey $n=3$, so ist das 3te Glied der gegebenen Reihe

$$=-104-3290-5420=-8814.$$

§. 264.

Scherffer in s. Supplem. ad sex Institut. Mathemat. Volum. p. 25. gibt aus *P. Riccati* Institutionibus Analyticis folgende Anweisung zu Erfindung des allgemeinen Gliedes (Termini generalis) für die Formeln der Summe: $An+Bn^2$; $An+Bn^2+Cn^3$; $An+Bn^2+Cn^3+Dn^4$ ꝛc.

Für $An+B^2$ erhebe man $n-1$ zur zweyten Potenz, n^2-2n+1; man lasse das erste Glied weg, verändere in den übrigen die Zeichen, multiplicire sie in B, und addire A; so kommt $t=A+2Bn-B$.

Für $An+Bn^2+Cn^3$ erhebe man $n-1$ zur dritten Potenz n^3-3n^2+3n-1; man lasse das erste Glied weg, verändere die Zeichen der übrigen Glieder, multiplicire sie mit C, und addire das allgemeine Glied vorhergehender Formel; so kommt $t=A+2Bn-B+3Cn^2-$ $-3Cn+C$.

Für $An+Bn^2+Cn^3+Dn^4$ erhebe man $n-1$ zur vierten Potenz, $n^4-4n^3+6n^2-4n+1$; lasse n^4 weg, ändere die übrigen Zeichen, multiplicire die Glieder mit D; und addire die vorhergehende Formel; so kommt $t=A+$ $+2Bn-B+3Cn^2-3Cn+C+4Dn^3-$ $-6Dn^2+4Dn-D.$

Für $An+Bn^2+Cn^3+Dn^4+En^5$. Nehme man $(n-1)^5=n^5-5n^4+10n^3-$ $-10n^2+5n-1$; lasse das erste Glied weg; verändere die Zeichen, multiplicire mit E, und addire die vorige Formel, so wird $t=A+$ $+2Bn-B+3Cn^2-3Cn+C+4Dn^3-$ $-6Dn^2+4Dn-D+5En^4-10En^3+$ $+10En^2-5En+E.$

Und nach eben dieser Methode findet man das allgemeine Glied für alle Summen-Formeln von Reihen gleicher Differenzen.

§. 265.

Christ. Goldbach gibt in Act. Erudit. Lipſ. 1720. Menſ. Jan. einen beſondern Kunſtgrif an die Hand, das allgemeine Glied, (Terminus generalis) einer Reihe zu finden. Er beſtehet in der Formel:

$$a+(x-1)b+\left(\frac{x^2-3x+c}{2}\right)c+$$
$$+\left(\frac{x^3-6x^2+11x-6}{6}\right)d+$$
$$+\left(\frac{x^4-10x^2+35x^2-50x+24}{24}\right)e \text{ etc.,}$$

Z. B. Es sey die Reihe

$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63}$ etc.

bey welcher das Gesetz ihrer Fortschreitung unbekannt ist.

Man nenne das erste Glied der Reihe = a, die erste Differenz = b, die erste Differenz der Differenzen = c, u. s. w. bis man zu einer beständig gleichen Differenz gelanget: So wird obige Formel das allgemeine Glied entdecken.

Erstes Glied a = 3); 15; 35; 63
erste Differenz b = 12); 20; 28
beständige Differ. c = 8); 8
(2te Diff. Reihe)

So kommt nach der Formel

$a = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3$
$(x-1)b = \ldots\ldots\ldots\ldots 12x-12$
$\left(\frac{x^2-3x+2}{2}\right)c = 4x^2 - 12x + 8$

davon ist die Summe

$$\frac{}{4x^2-1}$$

als das gesuchte allgemeine Glied.

Z. B. ist $n=4$, so ist $4.4^2 - 1 = 4.16 - 1 = 64 - 1 = 63$ das vierte Glied.

§. 265b.

Man suche die Summe folgender Reihe; oder

$s = ax - bx^2 + cx^3 - dx^4 + ex^5 -$ etc.

Man setze

$$x = \frac{y}{1-y} = y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + \text{etc.}$$

ſo iſt

$$s = ay + ay^2 + ay^3 + ay^4 + ay^5$$
$$- by^2 - 2by^3 - 3by^4$$
$$+ cy^3 + 3cy^4$$
$$- dy^4$$

$$s = ay - (b-a)y^2 + (c-2b+a)y^3 -$$
$$- (d-3c+3b-a)y^4 \text{ etc.}$$

Es ſey $x = 1$, und $y = \frac{1}{2}$, ſo kommt

$$s = a - b + c - d + e - f \text{ etc.}$$

$$s = \frac{a}{2} - \frac{ba}{4} + \frac{c-2b+a}{8} - \frac{d-3c+3b-a}{16}$$

*) $1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36$. ꝛc.
3 5 7 9
2 2 2

folglich $s = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} = 0$

*) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6$
1 1

folgl. $s = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Das dritte Kapitel.

Potenzenreihen. Geometrische Reihen. Harmonische Reihen.

Potenzenreihen.

Summirung von Potenzenreihen, deren Wurzeln nach der natürlichen Zahlenordnung folgen.

§. 266.

Es sey

$$0+1+1+1+1+1 \text{ etc.} = \int n^0$$
$$0+1+2+3+4+5 \text{ etc.} = \int n^1$$
$$0+1+4+9+16+25 \text{ etc.} = \int n^2$$
$$0+1+8+27+64+125 \text{ etc.} = \int n^3$$
$$\text{etc.} \quad \text{etc.}$$

ferner sey

$$1+1+1+1+1+1 \text{ etc.} = \int (n+1)^0$$
$$1+2+3+4+5+6 \text{ etc.} = \int (n+1)^1$$
$$1+4+9+16+25+36 \text{ etc.} = \int (n+1)^2$$
$$1+8+27+64+125+216 \text{ etc.} = \int (n+1)^3$$
$$\text{etc.}$$

Es bedeutet nemlich $\int n^0$ die Summe aller Einheiten einer von 0 anfangenden Reihe. $\int (n+1)^0$ bedeutet die Summe aller Einheiten einer Reihe, welche von 1 anfangt. (Weil 0 der Exponent der Einheit ist.) n aber stellt jede Einheit in der ersten, und $n+1$ in der anderen Reihe vor. Ist daher die Zahl der

Glieder in einer jeden von beyden Reihen gleich groß, so ist

$$\int(n+1)^\circ - \int n^\circ = (n+1)^\circ = 1$$

Eben so bedeutet $\int n^1$ die Summe einer natürlichen Zahlenreihe, welche von 0 anfangt, und n jedes Glied derselben; $\int(n+1)^1$ bezeichnet die Summe einer eben solchen Zahlenreihe, welche von 1 anfangt, und $n+1$ jedes Glied derselben, 1, 2, 3, 4. ꝛc. (weil 1 der Exponent der Wurzeln ist, oder der ersten Dignität.) Wenn also in beyderley Reihen einerley Anzahl der Glieder ist, so ist

$$\int(n+1)^1 - \int n = (n+1)^1$$

wo $n+1$ das lezte Glied der von 1 anfangenden Reihe bedeutet, um das sie nemlich von der Reihe, welche von 0 anfangt, unterschieden ist. Eben so ist

$$\int(n+1)^2 - \int n^2 = (n+1)^2$$
$$\int(n+1)^3 - \int n^3 = (n+1)^3$$
$$\int(n+1)^4 - \int n^4 = (n+1)^4$$

und überhaupt

$$\int(n+1)^{m+1} - \int n^{m+1} = (n+1)^{m+1}$$

Nun aber ist

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \text{ und}$$
$$\int(n+1)^2 = \int n^2 + 2\int n^1 + \int n^\circ + 1$$

Daraus folgt

$$\int(n+1)^2 - \int n^2 - \int n^\circ - 1 = 2\int n^1$$

das ist, weil $\int(n+1)^2 - \int n^2 = (n+1)^2$ nach obigem,

$$\text{und } (n+1)^2 - \int n^\circ - 1 = 2\int n^1$$

durch 2 dividirt

$$\tfrac{1}{2}(n+1)^2 - \tfrac{1}{2}\int n^\circ - \tfrac{1}{2} = \int n^1$$

*) Z. B. Es sey $n=5$; so ist $\frac{1}{2}(n+1)^2 = \frac{36}{2} = 18$; $\frac{1}{2}\int n^\circ = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$; also $\int n^1$ als die Summe aller Wurzeln von 0 bis $5 = 18 - 3 = 15$. Eben so, wenn $n=3$, so

so ist $\frac{1}{2}(n+1)^2 = 8$; $\frac{1}{2}\int n^0 = 1\frac{1}{2}$; und demnach $\int n^1 = 6$.

Gleichermassen ist

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$
$$\int(n+1)^3 = \int n^3 + 3\int n^2 + 3\int n^1 + \int n^0 + 1$$
$$\int(n+1)^3 - \int n^3 - 3\int n^2 - \int n^0 - 1 = 3\int n^1$$

das ist, nach dem oben erwiesenen, da

$$\int(n+1)^3 - \int n^3 = (n+1)^3 \text{ und}$$
$$(n+1)^3 - 3\int n^1 - \int n^0 - 1 = 3\int n^2$$

durch 3 dividirt

$$\frac{1}{3}(n+1)^3 - \int n^1 - \frac{1}{3}\int n^0 - \frac{1}{3} = \int n^2$$

*) Wenn also $n = 5$; so ist $\frac{1}{3}(n+1)^3 = \frac{216}{3} = 72$; $\int n^1 = 15$; $\frac{1}{3}\int n^0 = 1\frac{2}{3}$; demnach $\int n^2 = 72 - 17 = 55$. Eben so, wenn $n = 3$, so ist $\frac{1}{3}(n+1)^3 = 21\frac{1}{3}$; $\int n = 6$; $\frac{1}{3}\int n^0 = 1$; und demnach $\int n^2 = 21\frac{1}{3} - 7\frac{1}{3} = 14$.

Ferner ist

$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$
$$\int(n+1)^4 = \int n^4 + 4\int n^3 + 6\int n^2 + 4\int n^1 + \int n^0 + 1$$
$$\int(n+1)^4 - \int n^4 - 6\int n^2 - 4\int n^1 - \int n^0 - 1 = 4\int n^3$$

das ist, weil nach dem obigen

$$\int(n+1)^4 - \int n^4 = (n+1)^4$$
$$(n+1)^4 - 6\int n^2 - 4\int n^1 - \int n^0 - 1 = 4\int n^3$$
$$\frac{1}{4}(n+1)^4 - \frac{3}{2}\int n^2 - \int n^1 - \frac{1}{4}\int n^0 - \frac{1}{4} = \int n^3$$

*) Ist nun $n = 5$; so ist $\frac{1}{4}(n+1)^4 = 324$; $\frac{3}{2}\int n^2 = 82\frac{1}{2}$; $\int n^1 = 15$; $\frac{1}{4}\int n^0 = 1\frac{1}{4}$; und folglich $\int n^3 = 324 - 99 = 225$.

Anmerkung. Jedes der von uns angeführten Beyspiele zeiget die Ursache, warum jedesmal 1 addirt werden mußte. Denn wenn in der Gleichung

$$\int(n+1)^2 = \int n^2 + 2\int n^1 + \int n^0 + 1$$

die $n = 4$ ſind; ſo wird

$$\int n^0 = 0 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$\int n^1 = 0 + 1 + 2 + 3 + 4$$
$$\int n^2 = 0 + 1 + 4 + 9 + 16$$
$$\int (n+1)^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25$$

Da nun unter $\int (n+1)^2$ und $\int n^2$ die Differenz 52 iſt; $2\int n^1 + \int n^0$ nur 24; ſo erhellet, daß man, um die Gleichheit zu erhalten, noch eine Einheit addiren müſſe.

§. 267.

Eine allgemeine Formel zu Summirung der Potenzen zu finden.

Auflöſung.

Weil $(n+1)^{m+1} = n^{m+1} + \frac{m+1}{1} n^m +$

$$+ \frac{m+1 . m}{1.2} n^{m-1} + \frac{m+1 . m . m-1}{1.2.3} n^{m-2} +$$
$$+ \frac{m+1 . m . m-1 . m-2}{1.2.3.4} n^{m-3} \infty$$

ſo iſt

$$\int (n+1)^{m+1} = \int n^{m+1} + \frac{m+1}{1} \int n^m +$$

$$+ \frac{m+1 . m}{1.2} \int n^{m-1} + \frac{m+1 . m . m-1}{1.2.3} \int n^{m-2} +$$
$$+ \frac{m+1 . m . m-1 . m-2}{1.2.3.4} \int n^{m-3} +$$
$$+ \text{in infin.} + 1.$$

Dem-

Demnach ist

$$\int(n+1)^{m+1} - \int n^{m+1} - \frac{m+1.m}{1.2}\int n^{m-1} -$$
$$- \frac{m+1.m.m-1}{1.2.3}\int n^{m-2} -$$
$$- \frac{m+1.m.m-1.m-2}{1.2.3.4}\int n^{m-3} \text{ &c.}$$
$$\text{in inf.} - 1 = \frac{m+1}{1}\int n^m$$

Es ist aber

$\int(n+1)^{m+1} - \int n^{m+1} = (n+1)^{m+1}$ (nach obigem §. 266.

Folglich:

$$\int(n+1)^{m+1} - \frac{m+1.m}{1.2}\int n^{m-1} -$$
$$- \frac{m+1.m.m-1}{1.2.3}\int n^{m-2} -$$
$$- \frac{m+1.m.m-1.m-2}{1.2.3.4}\int n^{m-3} \text{ &c.}$$
$$\text{in infin.} - 1 = \frac{m+1}{1}\int n^m$$

Demnach

$$\int n^m = \frac{1}{m+1}(n+1)^{m+1} - \frac{m}{1.2}\int n^{m-1} -$$
$$- \frac{m.m-1}{1.2.3}\int n^{m-2} -$$
$$- \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3.4}\int n^{m-3} \text{ &c.}$$
$$\text{in infin.} - \frac{1}{m+1}$$

*) Z. B. Es sey $m = 3$; so wird $m+1=4$; $m-1=2$; $m-2=1$; $m-3=0$; also $\frac{1}{4}(n+1)^4 = \frac{3}{2}\int n^2 - \int n^1 - \frac{1}{4}\int n^0 - \frac{1}{4} = \int n^3$, (wie oben §. 266.)

§. 268.

Da die Summirung der höheren Potenzen von der Summirung aller niedrigeren abhängt; so werden, wenn man in den höheren Formeln für $\int n^{m-1}$; $\int n^{m-2}$; $\int n^{m-3}$ ꝛc. die Werthe aus dem niedrigeren substituirt, Formeln zum Vorschein kommen, welche durch das n allein die Summen der Potenzen bestimmen, ohne vorhergehende Summirungen voraus zu setzen.

Z. B.

$\int n^0 = n$ (§. 266.)

$2\int n^1 = (n+1)^2 - \int n^0 - 1$ (§. 266.)

$n^2 + 2n + 1 - n - 1 = n^2 + n$

$3\int n^2 = (n+1)^3 - 3\int n^1 - \int n^0 - 1$ (§. 266.)=

$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - n - 1 =$

$= \frac{2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2}{2}$

$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2}$

$4\int n^3 = (n+1)^4 - 6\int n^2 - 4\int n^1 - \int n^0 - 1$

(§. 267.)

$= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - 2n^3 - 3n^2 - n - 2n^2 - 2n - n - 1$

$= n^4 + 2n^3 + n^2$

$5\int n^4$

$$5\int n^4 = (n+1)^5 - 10\int n^3 - 10\int n^2 - 5\int n^1 - \int n^0 - 1$$
$$= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 -$$
$$- 10n^4 - 20n^3 - 10n^2 -$$
$$- 10n^3 - 15n^2 - 5n - 5n^2 - 5n - n - 1$$
$$= (6n^5 + 30n^4 + 60n^3 + 60n^2 + 30n + 6 -$$
$$- 15n^4 - 50n^3 - 60n^2 - 30n - 6) : 6$$
$$= \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{6}$$

Folglich

$$\int n^0 = n$$
$$\int n^1 = \frac{n^2 + n}{2}$$
$$\int n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$
$$\int n^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$$
$$\int n^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

u. s. w.

§. 269.

Man kann sich auch folgender Methode bedienen:

Wenn man die Zahl der Glieder $= n$ sezt, so ist in einer arithmetischen Progression deren erstes Glied $= 1$, und die Differenz $= 1$, wo also die Zahl der Glieder und das lezte Glied jedesmal einander gleich sind, nach der Formel $(a+u)^{\frac{n}{2}}$

$$\text{die Summe} = (1+n)^{\frac{n}{2}} = \frac{n^2 + n}{2}$$

Hier:

Hieraus läßt sich leicht finden, wie sich die Summe einer solchen Progression zum Produkt des lezten Gliedes in die Zahl der Glieder verhalte.

$$\text{Summe} = \frac{n^2 + n}{2}$$

$$\text{Produkt} = n.n = n^2$$

$$\text{Summe : Produkt} = \frac{n^2 + n}{2} : n^2$$

$$= 1 + n : 2n$$

*) Es sey die Zahl der Glieder = 6, so ist
Summe : Produkt = 1 + 6 : 2.6 = 7 : 12.

Wenn auch diese Progression ins Unendliche fortgehet, also die Zahl der Glieder und das lezte Glied unendlich groß sind, so läßt sich nichts desto weniger dieses Verhältnis finden.

Summe : Produkt = 1 + n : 2n
hier aber ist n unendlich groß, also 1 wie nichts dargegen; also 1 + n = 0 + n = n
folgl. Summe : Produkt = n : 2n
= 1 : 2

Folglich verhält sich in obiger unendlichen arithmetischen Progression die Summe zum Produkt des lezten Gliedes in die Zahl der Glieder, wie 1 zu 2.

§. *

1.) Man fand oben zur Summe der arithmetischen Reihe $= \frac{n^2 + n}{2}$; da nun n^2 eine Quadratzahl ist, so setze man nun auch eine Reihe von Quadratzahlen:

Progr. 1, 2, 3, 4, 5....
Quadr. Zahlen 1, 4, 9, 16, 25....

Sume der Progr. $\frac{2}{2}, \frac{6}{2}, \frac{12}{2}, \frac{20}{2}, \frac{30}{2}$... nach obiger For-
oder 1, 3, 6, 10, 15 .... mel

Nun benenne man eine Summe in jeder Progreſsion mit Sm;

Z. B. $6 = Sm$; $10 = Sm$, u. ſ. w.

In den Quadratzahlen aber benennt man jede Summe mit Sm^2;

z. B. $1 + 4 = Sm^2$; $1 + 4 + 9 = Sm^2$.

Wenn eine Summe ein Glied mehr hat, als die andere, ſo benennt man die gröſſere Summe in der Progreſſion mit $S(m + 1)$; in den Quadratzahlen aber mit $S(m + 1)^2$

Z. B. in der Progreſſion hat die Summe 15 ein Glied mehr, als die Summe 10; wenn demnach $Sm = 10$, ſo iſt $15 = S(m + 1)$.

2.) Weil $S(m + 1)$ ein Glied, und zwar das lezte Glied mehr hat, als das erſte, ſo iſt $S(m+1) - (n+1) = Sm$; oder $S(m+1) - Sm = n + 1$.

*) Z. B. $150 - 10 = 5$, ſo das lezte Glied, oder die Zahl der Glieder iſt; und $15 - (4+1) = 10$

Eben ſo, weil $S(m + 1)^2$ ein Glied mehr hat, als Sm^2, ſo iſt

$S(m + 1)^2 - (n + 1)^2 = Sm^2$
$S(m + 1)^2 - Sm = (n + 1)^2$

*) 1, 4, 9, 16, 25....
Summe 1, 5, 14, 30, 55....

Wenn nun $30 = Sm$; ſo iſt $55 = S(m+1)^2$
Nun iſt $55 - 30 = 25$; 25 aber iſt das Quadrat von 5; und $5 = 4 + 1$; indem 30 aus 4 Gliedern $= n$ entſtanden; daher iſt

$S(m + 1)^2 - Sm^2 = (n + 1)^2$

3.) Weil

3.) Weil $(m+1)^2 = m^2 + 2m + 1$; so schließt man, daß $S(m+1)^2 = Sm^2 + 2Sm + 1$: Wenn man aber die Probe macht, so findet man, daß die Zahl der Glieder noch abgehet; mithin ist

$$S(m+1)^2 = Sm^2 + 2Sm + 1 + n.$$

*) Es sey die Zahl der Glieder $= n = 4$

$S(m+1)^2 = 55$, so ist

$$Sm^2 + 2Sm + 1 + n = 30 + 2.10 + 1 + 4 = 55.$$

4.) Soll man nun die Summe einer Progression finden, so bediene man sich solcher Ausdrücke von Quadraten.

$$S(m+1)^2 = Sm^2 + 2Sm + 1 + n$$
$$S(m+1)^2 - Sm^2 = 2Sm + 1 + n$$

nun ist nach oben nro. 2.

$S(m+1)^2 - Sm^2 = (n+1)^2$ folgl.

$$2Sm + 1 + n = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$
$$2Sm = n^2 + 2n + 1 - 1 - n$$
$$Sm = \frac{n^2 + n}{2}$$

Es kommt also für die Summe nach dieser Methode eben so viel heraus, als oben §. 268. kam.

§. 270.

Wenn man sich diese Methode recht bekannt macht, so kann man auch die von 1 anfangende Reihen von Quadratzahlen leicht summiren; und zwar hat man hiezu Cubikzahlen zu Hülfe zu nehmen.

Progr. 1, 2, 3, 4, 5 ...	Sumen 1, 3, 6, 10, 15 ...
Quadr. 1, 4, 9, 16, 25 ...	1, 5, 14, 30, 55 ...
Cubi 1, 8, 27, 64, 125	1, 9, 36, 100, 225 ...

1.) Jede

1.) Jede Summe in den Cubikzahlen heisse man Sm^3 ꝛc. z. B. $9 = Sm^3$. Und wenn eine Summe ein Glied mehr hat, als die andere, so heißt man die grössere $S(m+1)^3$. Z. B. wenn $100 = Sm^3$, so ist $225 = S(m+1)^3$.

2.) Gleichwie oben $S(m+1)^2 - Sm^2 = (m+1)^2$ war, so ist auch
$S(m+1)^3 - Sm^3 = (m+1)^3$

3.) Es ist auch, weil $(m+1)^3 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1$
$S(m+1) = Sm^3 + 3Sm^2 + 3Sm + 1 + n$
(nach der Analogie des vorhergehenden §. nro. 2. 3.)

4.) Es lassen sich nun die Summen der Quadratzahlen, so von 1 anfangen, also finden:
$S(m+1)^3 = Sm^3 + 3Sm^2 + 3Sm + 1 + n$
$S(m+1)^3 - Sm^3 = 3Sm^2 + 3Sm + 1 + n.$
Nun ist
$S(m+1)^3 - Sm^3 = (m+1)^3$ folgl.
$3Sm^2 + 3Sm + 1 + n = (m+1)^3$
$3Sm^2 = (m+1)^3 - 3Sm - 1 - n$

Nun ist $Sm = \frac{n^2+n}{2}$ (§. 269.) und $m = n$

folgl. $3Sm^2 = (n+1)^3 - \frac{3n^2}{2} - \frac{5n}{2} - 1$

$$Sm^2 = \frac{(n+1)^3 - \frac{3n^2}{2} - \frac{5n}{2} - 1}{3}$$

(oder kürzer, wie oben:
$\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$)

Z. B. Man soll in den Quadratzahlen die Summe von 5 Gliedern finden.

Also $n=5$

$(n+1)^3=6^3=216$

$3n^2=75$

$5n=25$. folgl.

$$Sm^2=\frac{216-\frac{75}{2}-\frac{25}{2}-1}{3}=55.$$

5.) Man kann auch finden, wie sich die Summe der Quadratzahlen zum Produkt aus dem lezten Gliede in die Zahl der Glieder verhalte.

$$\text{Summe}=(n+1)^3-\frac{\frac{3n^2}{2}-\frac{5n}{2}-1}{3}\ (\text{nro.4.})$$

$$\text{Summe}=n^3+\frac{\frac{3n^2}{2}+\frac{n}{2}}{3}$$

$\text{Produkt}=n^2.n=n^3$

Also,

$$\text{Summe}:\text{Produkt}=n^3+\frac{\frac{3n^2}{2}+\frac{n}{2}}{3}:n^3$$

$=n^3+\frac{3n^2}{2}+\frac{n}{2}:3n^3$

$=2n^3+3n^2+n:6n^3$

$=2n^2+3n+1:6n^2$

Z. B. Es sey Progr. 1, 2, 3, 4, 5...
Quadr. Z. 1, 4, 9, 16, 25...

Man

Man soll finden, wie sich $1+4+9+16+25$ zu 25.5 verhalte? Weil $n=5$, so ist

Summe : Produkt $= 2.25+3.5+1 : 6.25$
$= 66 : 150$
$= 11 : 25$

denn $1+4+9+16+25=55$, und $25.5=125$

es verhält sich aber $55 : 125$ wie $11 : 25$.

6.) Auch lässet sich nach obiger Analogie finden, wie sich die Summe unendlich vieler Quadratzahlen zum Produkt aus dem lezten in die unendliche Anzahl der Glieder verhalte.

Summe : Produkt $= 2n^2+3n+1 : 6n^2$

Weil aber n unendlich groß ist, so ist 1 dagegen wie nichts;

mithin Summe : Produkt $= 2n^2+3 : 6n^2$

weil aber auch 3 gegen 2n wie nichts ist, so ist:

Summe : Produkt $= 2n^2 : 6n^2$
$2n : 6n$
$2 : 6$
$1 : 3$

Man erhält also den Lehrsatz:

Die Summe unendlich vieler Quadratzahlen verhält sich zum Produkt aus dem lezten Gliede in die Zahl der Glieder, wie 1 : 3; oder, das Produkt ist 3mal grösser, als die Summe.

§. 271.

Auf gleiche Weise kann man auch die Summe der Cubikzahlen, so von 1 anfangen, finden, und zwar vermittelst der Biquadratzahlen.

1.) Eine jede Summe in den Biquadratzahlen heißt Sm^4

Und welche Summe ein Glied mehr hat, als die andere, heißt $S(m+1)^4$

2.) Es ist auch $S(m+1)^4 - Sm^4 = (m+1)^4 = m^4 + 4m^3 - 6m^2 + 4m + 1$

3.) Und daher $S(m+1)^4 = Sm^4 + 4Sm^3 + 6Sm^2 + + 4Sm + 1 + n$.

4.) Und so lassen sich die Summen der Cubikzahlen, so von 1 anfangen, finden.

Es ist $S(m+1)^4 = Sm^4 + 4Sm^3 + 6Sm^2 + 4Sm + 1 + n$

$S(m+1)^4 - Sm^4 = 4Sm^3 + 6Sm^2 + + 4Sm + 1 + n$

Nun ist $S(m+1)^4 - Sm^4 = (m+1)^4$ (nro. 2.)

folgl. $4Sm^3 + 6Sm^2 + 4Sm + 1 + n = (m+1)^4$

Nun ist $Sm^2 = n^3 + \frac{3n}{2} + \frac{n}{2}$

$$Sm = \frac{n^2 + n^3}{2}$$

$m = n$ Nach den vorigen §§.

$4Sm^3 + 2n^3 + 3n^2 + n + 2n^2 + 2n + 1 + n = (m+1)^4$

$= (n+1)^4$

$4Sm^3 + 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1 = n^4 + 4n^3 + + 6n^2 + 4n + 1$

$4Sm^3 = n^4 + 2n^3 + n^2$

$$Sm^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{(n^2+n)^2}{4}$$

z. B. Es sind 4 Glieder von Cubikzahlen; man soll die Summe solcher Glieder finden. 1, 8, 27, 64.

$$1+8+27+64=\frac{(n^2+n)^2}{4}$$

Nun ist $n=4$, also $\frac{(16+4)^2}{4}=100$.

5.) Auch kann man finden, wie sich die Summe der cubischen Zahlen zum Produkt aus dem ersten Gliede in die Zahl der Glieder verhalte.

$$\text{Summe}=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4} \text{ (nro. 4.)}$$

$$\text{Produkt } n^3 . n = n^4$$

$$\text{Summe : Produkt}=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4} : n^4$$

$$=n^2+2n+1 : 4n^2$$

Und sezt man die Zahl der Glieder unendlich groß, so ist 1 gegen n wie nichts, folgl.

$$\text{Summe : Produkt}=n^2+2n : 4n^2$$

$$=n+2 : 4n$$

Auch verschwindet 2 gegen n; folgl.

$$=n : 4n$$

$$=1 : 4$$

Lehrsatz. Wenn die Zahl der Glieder in den cubischen Zahlreihen unendlich groß ist, so verhält sich die Summe der cubischen Zahlen zum Produkt aus dem lezten Gliede in die Zahl der Glieder, wie 1 : 4.

§. 272.

Wenn man nun die bisherige Reihen mit einander vergleicht, so findet man, daß die Summe unendlicher Zahlenreihen zum Produkt aus dem lezten Gliede in die Zahl der Glieder sich verhalte,

1.) bey den Wurzeln, wie 1 : 2.
2.) bey den Quadratzahlen, wie 1 : 3.
3.) bey den Cubikzahlen, wie 1 : 4.

Und man kann nun also zu höheren Dignitäten fortgehen; z. B. bey biquadratischen Zahlen, wie 1 : 5.

Es ist nemlich in der Verhältniß die erste Zahl 1, und die andere um 1 grösser, als der Exponent.

§. 273.

In dem Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik, Jahrgang 1787. 4ten Stück S. 480. gibt Hr. J. P. Gruson eine sehr bequeme Auflösung der

Aufgabe:

Auf eine kurze und leichte Art die Potenzensumme der Ordnung n zu finden.

Aufl.

Wenn x die Anzahl der Glieder ist, und die Summe von

$1^m + 2^m + 3^m + 4^m + x^m$ mit Sx^m bezeichnet wird, so ist

$$Sx^m + (x+1)^m = 1^m + (1+1)^m + \\ +(2+1)^m + (3+1)^m + \ldots + (x+1)^m$$

Erhebt man die Glieder der zweyten Hälfte wirklich zur mten Potenz, so erhält man:

Sx^m

$$S x^m + (x+1)^m =$$

$$+ {}^{x}_{m} + {}^{3}_{m} + {}^{2}_{m} + {}^{1}_{m} + {}^{1}_{m}$$

$$+ \frac{m}{1} + \frac{m-1}{1,2} + \frac{m-1}{1,2,3} + \frac{m-1}{1,2,3,4} + \frac{m-1}{1,2,3,4,5} + \cdots

Die Summen der vertikalen Reihen bezeichne man mit Sx^m, Sx^{m-1}, Sx^{m-2} u. s. w. je nachdem der Exponent der Glieder m, m — 1, m — 2, u. s. w. ist, so hat man

$$Sx^m + (x+1)^m = 1 + Sx^m + m.Sx^{m-1} + \frac{m.m-1}{1.2}.Sx^{m-2} + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}Sx^{m-3} + \ldots\ldots$$

folglich

$$Sx^{m-1} = \frac{(x+1)^m - 1}{m} - \left(\frac{m-1}{2}.Sx^{m-2} + \frac{m-1.m-2}{1.2.3}Sx^{m-3} + \frac{m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}Sx^{m-4} + \ldots\ldots\right)$$

Sezt man überall n statt m — 1, so erhält man die verlangte Summenformel der Ordnung n

$$Sx^n = \frac{(x+1)^{n+1} - 1}{n+1} - \left(\frac{n}{2}Sx^{n-1} + \frac{n.n-1}{1.2.3}.Sx^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3.4}.Sx^{n-3} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4.5}.Sx^{n-4} + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5.6}.Sx^{n-5} + \ldots\right)$$

Oder, wenn man sich zu Bezeichnung der Binomischen Coefficienten der grossen deutschen Versalbuchstaben bedienet, so erhält man folgende Formel:

Sx^n

$$Sx^n = \frac{(x+1)^{n+1}-1}{n+1} - (\tfrac{1}{2}A.Sx^{n-1} + \tfrac{1}{3}.B.Sx^{n-2} + \tfrac{1}{4}.C.Sx^{n-3} + \tfrac{1}{5}.D.Sx^{n-4} + \ldots)$$

Sezt man nach und nach $n=0; =1; =2; =3; =4; =5; =6$, u. s. w. so hat man für diese Fälle folgende Formeln:

$$Sx^0 = x; \quad Sx = \frac{(x+1)x}{2};$$

$$Sx^2 = \frac{x.\,x+1.\,2x+1}{6};$$

$$Sx^3 = [\frac{(x+1)x}{2})^2;$$

$$Sx^4 = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{30};$$

$$Sx^5 = \frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{2} + \frac{5.x^4}{12} - \frac{x^2}{12};$$

$$Sx^6 = \frac{x^7}{7} + \frac{x^6}{2} + \frac{x^5}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x}{42};$$ u. s. w.

Ueberhaupt kann die Potenzensumme der Ordnung 12 gefunden werden, wenn die Potenzensummen aller niedern Ordnungen schon bekannt sind. Und auf eine kürzere und leichtere Art wird man schwehrlich die Summenformel der Ordnung n finden.

Sezt man die Anzahl der Glieder ∞; so erhält man

$$Sx^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^n.\,x}{n+1}.$$

Hieraus fließt folgende Regel:

Die Potenzensumme der Ordnung n ist gleich dem durch $n+1$ dividirten Produkte des lezten Gliedes der Reihe in die Anzahl aller Glieder.

Geometrische Reihen.

§. 274.

Auch bey den Geometrischen Reihen wollen wir die 20 hier vorkommende Formeln nach einander anführen, von denen sich 18 aus den schon oben (§. 57. 58.) erklärten beyden Formeln $s=\frac{\omega q-a}{q-1}$ und $\omega=aq^{n-1}$ herleiten lassen.

I. $s=\frac{\omega q-a}{q-1}$

II. $a=\omega q+s-sq$

III. $q=\frac{s-a}{s-\omega}$

IV. $\omega=\frac{Sq+a-s}{q}$

V. $\omega=aq^{n-1}$

VI. $a=\frac{\omega}{q^{n-1}}$

VII. $q=\sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}}$, oder $\log. q=\frac{1}{n-1}\log.(\frac{\omega}{a})$

VIII. $n=1+\frac{\log.\omega-\log.a}{\log. q}$

Denn

Denn $\omega = aq^{n-1}$ und

$$q^{n-1} = \frac{\omega}{a};$$

also auch $\log. q^{n-1} = \log. \frac{\omega}{a}$

$$(n-1)\log. q = \log. \frac{\omega}{a}$$

$$n\log. q - \log. q = \log. \frac{\omega}{a}$$

$$n\log. q = \log. q + \log. \left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$n = \frac{\log. q}{\log. q} + \frac{\log. \frac{\omega}{a}}{\log. q}$$

$$= 1 + \frac{\log. \omega - \log. a}{\log. q}$$

IX. $s = \frac{aq^n - a}{q-1}$, wenn man in Nro. V. für ω seinen Werth aus Nro. IV. setzet.

X. $a = \frac{sq - s}{q^n - 1}$

XI. $n = \frac{\log. (sq + a - s) - \log. a}{\log. q}$

XII. $q^n - \frac{sq}{a} + \frac{s}{a} - 1 = 0$ Welcher Werth für q sich nicht einfacher ausdrücken läßt. (Vega, Vorles. über die Mathematik. I. Band. S. 246.)

XIII. $\omega = \frac{sq^n - sq^{n-1}}{q^n - 1}$; wenn man in Nro. V. für a seinen Werth aus Nro. II. setzet.

XIV. $s = \frac{\omega q^n - \omega}{q^n - q^{n-1}}$

XV. $q^n - \left(\frac{s}{s-\omega}\right).q^{n-1} + \frac{\omega}{s-\omega} = 0$;

Auch dieser Werth für q läßt sich nicht einfacher ausdrücken.

XVI. $n = 1 + \frac{\log.\omega - \log.(\omega q + s - sq)}{\log. q}$

XVII. $n = 1 + \frac{\log.\omega - \log. a}{\log.(s-a) - \log.(s-\omega)}$;

wenn man in Nro. V. für q den Werth aus Nro. III. setzet.

XVIII. $s = \frac{\omega^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{\omega^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$

XIX. $(s-\omega).\omega^{\frac{1}{n-1}} - (s-a).a^{\frac{1}{n-1}} = 0$

XX. $(s-a).a^{\frac{1}{n-1}} - (s-\omega).\omega^{\frac{1}{n-1}} = 0$

Auch diese zwey leztere Formeln lassen sich auf keinen einfacheren Ausdruck bringen.

§. 275.

Die Reihe der Differenzen einer geometrischen Reihe ist ebenfalls eine geometrische Reihe, die eben denselben Exponenten hat.

Und wenn von diesen Differenzen wieder die Differenzen genommen werden, so ist die zweyte Diffe-

Differenzenreihe ebenfalls geometrisch von eben demselben Exponenten.

Eben so auch die dritte Differenzenreihe und so fort.

Es sey die Hauptreihe = 1, 3, 9, 27, 81, 243
so ist die I. Differenzenreihe = 2, 6, 18, 54, 162
II. Differenzenreihe = 4, 12, 36, 108
III. Differenzenreihe = 8, 24, 72
IV. Differenzenreihe = 16, 48
bey allen diesen Reihen ist der Exponent = 3.

(Ja auch die ersten Glieder dieser auf einander folgenden Reihen geben eine geometrische Reihe, 1, 2, 4, 8, 16, deren Exponent = 2, oder q—1 ist.)

Aufgaben.

§. 276.

Man soll finden, aus welchem gewöhnlichen Bruche der Decimalbruch 0,575757 ... entstanden sey?

Aufl. $0.575757 = \frac{57}{100} + \frac{57}{1000} + \frac{57}{10000} + \frac{57}{\infty} =$

$$= \frac{57}{(100)^{\infty}} \cdots\cdots + \frac{57}{(100)^3} + \frac{57}{(100)^2} + \frac{57}{100}$$

demnach ist nach der Formel $s = \frac{\omega q - a}{q - 1}$

$$s = \frac{\left(\frac{57}{100}, 100 - \frac{57}{(100)^{\infty}}\right)}{99} = \frac{57}{99} = \frac{19}{33}$$

*) Es sollen zwischen 1 und 2 noch 11 Glieder also eingeschalten werden, daß alle 13 Glieder nun in einer geometrischen Progression fortgehen.

Aufl.

Aufl. Man hat hier zuerst den Quotienten zu suchen. Die Formel VII. gibt

$$\log. q = \frac{1}{n-1} \log. \frac{\omega}{a}$$

und hier ist $a = 1$; $\omega = 2$; $n = 13$

folgl. $\log. q = \frac{1}{12} \log. 2 = \frac{1}{12}. 0,30103 =$
$= 0,0250858.$

Da nun das allgemeine Glied $= aq^{n-1}$, oder der Logarithmus des allgemeinen Gliedes $=$
$= \log. a + (n-1) \log. q$
$= (n-1). 0,0250858$
so darf man nun nur nach einander $n = 2, 3, 4 \ldots$ setzen, so erhält man die Logarithmen des 2ten, 3ten, 4ten Gliedes; folglich auch die Glieder selbst.

Es ist nemlich der Logarithmus

des 2ten Gliedes	$= 0,0250858$	u. das Glied selbst	$= 1,059$
3ten	$= 0,0501716$		$= 1,122$
4ten	$= 0,0752574$		$= 1,189$
5ten	$= 0,1003432$		$= 1,260$
6ten	$= 0,1254290$		$= 1,335$
7ten	$= 0,1505148.$		$= 1,414$

u. s. w.

§. 277.

Aufgabe.

Es lässet jemand einen Brunnen graben, und verspricht dem Brunnenmeister für die erste Klafter 7 fl. für die zweyte 8mal so viel, als für die erste, nemlich 56 fl. für die dritte 8mal so viel, als für die zweyte, nemlich 448 fl. u. s. w. also für jede nachfolgende Klafter 8mal so viel als für die nächstvorhergehen-

gehende, weil die Arbeit immer beschwerlicher wird. Nun bringt der Brunnenmeister einen $2\frac{1}{3}$ Klafter tiefen Brunnen zu Stande; es fragt sich, wie viel man dem Brunnenmeister zu bezahlen habe?

Auflösung.

Weil die Zahlungen für die ganzen Klafter in einer geometrischen Reihe steigen sollen; so müssen auch die Zahlungen für die dritten Theile einer jeden Klafter in einer geometrischen Reihe steigen.

Nun sey der Exponent dieser Reihe $= y$
und die Zahlung für das erste Drittheil $= x$ fl.
so ist die Zahlung für das zweyte Drittheil
$= xy$
die Zahlung für das dritte Drittheil $= xy^2$
für das vierte $= xy^3$
für das fünfte $= xy^4$
für das sechste Drittheil $= xy^5$

Es verspricht aber der Accord für die ersten drey Drittheil, das ist für die erste Klafter $= 7$ fl.
folgl. ist $x + xy + xy^2 = 7$, ... (A)
Und die Zahlung für die folgenden drey Drittheil, nemlich für das zweyte Klafter ist accordsmäsig $= 56$ fl.
folgl. $xy^3 + xy^4 + xy^5 = 56$.
Man multiplicire die Gleichung A mit 8, (weil dieser erste Zahlungsposten 8mal geringer ist, als der andere,) so ist auch
$8x + 8xy + 8xy^2 = 56$
und demnach
$xy^3 + xy^4 + xy^5 = 8x + 8xy + 8xy^2$
und mit x dividirt,
$y^3 + y^4 + y^5 = 8 + 8y + 8y^3$

oder

oder

$$y^5+y^4+y^3-8y^2-8y-8=0$$

und diese Gleichung gibt für $y=2$.

folgl. ist $x+2x+4x=7$

nemlich $x=1$ fl.

Die Zahlungen müssen demnach folgende seyn:

Für das erste Drittheil $=1$ fl.

zweyte Drittheil $=2$ fl.

dritte . . . . $=4$.

vierte . . . . $=8$;

fünfte . . . . $=16$;

sechste . . . . $=32$;

siebente . . . . $=64$ fl.

Nemlich für $\frac{7}{3}$ oder $2\frac{1}{3}$ Klafter, beträgt die ganze Zahlung

$1+2+4+8+16+32+64=127$ fl.

(*) Man hätte diese nemliche Summe erhalten, wenn man in der Formel

$$s=\frac{aq^n-a}{q-1}$$

für a, q, und n ihre Werthe, nemlich $a=7$; $q=8$; und $n=\frac{7}{3}$ gesezt hätte.)

Aus den zwey Gleichungen

$$x+xy+xy^2=7 \quad \ldots\ldots \text{(A)}$$

$$xy^3+xy^4+xy^5=56 \quad \ldots\ldots \text{(B)}$$

kann der Werth von y durch eine reine Gleichung bestimmt werden: Man multiplicire die Gleichung A mit y^3, so kommt

$$xy^3+xy^4+xy^5=7y^3 \quad \ldots\ldots \text{(C)}$$

und subtrahire nun die Gleichung B von C; so kommt

$$0=7y^3-56$$

$$56=7y^3$$

$$8=y^3$$

$$\sqrt[3]{8}=y=2.$$

Anmer-

Anmerkung.

Man kann auch diese Aufgabe allgemein machen: Jedes Glied einer geometrischen Reihe $a; aq; aq^2; aq^3; aq^4 \ldots$ soll in m Theile dergestalt zertheilt werden, daß diese Theile wieder in einer geometrischen Reihe fortgehen. Und so läßt sich die Frage so wie die unmittelbar vorhergehende Aufgabe auflösen: oder auch ergibt sich

$$\text{der Exponent} = \sqrt[m]{q}$$

$$\text{und das erste Glied} = \frac{a\sqrt[m]{q} - a}{q - 1}$$

Vega, Vorles. I. Band. S. 301. 302.

§. 278.

Aufgabe.

Es ist die geometrische Progression 2, 4, 16, 256 .... gegeben, in welcher jedes folgende Glied das Quadrat des vorhergehenden ist; Man soll das 25ste Glied derselben finden.

Auflösung.

Man kann die Glieder dieser Progression auch also ausdrücken:

$$2^1; 2^2; 2^4; 2^8; \ldots\ldots$$

wo sodann in die Augen fällt, daß der Exponent des 25sten Gliedes $= 2^{24} = 16777216$ und also das gesuchte Glied selbst

$= 2^{16777216}$ seyn wird

und davon ist der Logarithmus

$= 16777216, l. 2.$

Da nun der log. 2
= 0, 30102999566398119 5,
so ist der Logarithmus der gesuchten Zahl
= 5050445, 25973367
aus dessen Charakteristik erhellet, daß die gesuchte Zahl auf die gewöhnliche Art ausgedruckt, aus 5050446 Ziffern bestehet; sucht man aber die folgende Zahlen (Mantisse) 25973367 in den Tafeln auf, so findet man die ersten Ziffern dieser Zahl 181858, welcher noch 5050440 andere folgen. Davon können auch wirklich einige aus grösseren Logarithmischen Tafeln gefunden werden; wie denn die ersten eilf Ziffern dieser Zahl diese: 18185852986 sind. (Euler, Einleit. in die Analysis des Unendlichen. Uebers. von Michelsen. I. Buch S. 120.)

Anhang

Anhang zum dritten Kapitel.

Harmonische Proportion und Reihe.

§. 279.

Da wir die verschiedenen Arten von Reihen betrachtet haben, so wollen wir noch in einem Anhang die besondere Eigenschaften der Harmonischen Reihe mitnehmen.

Wenn sich bey dreyen Zahlen die Differenz der ersten und anderen zur Differenz der anderen und dritten verhält, wie die erste zur dritten; so entstehet eine Harmonische Proportion.

Nichts ist nun leichter, als die Glieder einer solchen Harmonischen Proportion zu finden.

Aufgabe.

Man soll zu zwey gegebenen Grössen die dritte Harmonische Proportionalgrösse finden.

Auflösung.

erste Grösse = a
zweyte Gr. = b
dritte Gr. = x

$$b - a : x - b = a : x$$
$$bx - ax = ax - ab$$
$$2ax - bx = ab$$
$$x = \frac{ab}{2a - b}$$

Z. B. Es sey zu 10 und 16 die dritte harmonische Proportionalzahl zu finden; so gibt obige Formel:

$$\frac{10.16}{2.10-16} = \frac{160}{20-16} = \frac{160}{4} = 40.$$

denn es ist

$$16-10 : 40-16 = 16 : 40$$
$$6 : 24 = 1 : 4$$
$$4 = 4$$

Aufgabe.

Man soll zwischen zwey gegebenen Grössen die mittlere harmonische Proportionalgrösse finden.

Aufl.

erste Grösse $= a$
zweyte Gr. $= x$
dritte Gr. $= c$

$$x-a : c-x = a : c$$
$$cx-ac = ac-ax$$
$$cx+ax = 2ac$$
$$x = \frac{2ac}{c+a}$$

Es sey $a = 10$; $c = 40$ so ist

$$x = \frac{2.10.40}{50} = 16$$

§. 280.

Suchet man nun immer zu den zwey vorhergehenden die dritte harmonische Proportionalzahl; so erhält man eine harmonische Progression. Solche ist in allgemeinen Ausdrücken:

$$a, b, \frac{ab}{2a-b}, \frac{ab}{3a-2b}; \frac{ab}{4a-3b} \text{ &c.}$$

Sind nun zuerst die Zahlen gegeben: 10; 12; 15: so findet man nach obigen Formeln folgende Glieder dazu, und erhält folgende harmonische Progression:

10; 12; 15; 20; 30; 60

Weis

Weiter gehet aber nun diese Progression nicht; denn in den folgenden Gliedern würde der Nenner das Zeichen — bekommen.

Wollte man die Progression umkehren, und 60; 30; 20 zu den drey ersten Gliedern machen, so würden sich die folgende ebenfalls nach obigen Formeln ergeben; allein bey 10 würden die ganzen Zahlen aufhören. Wenn die Progression weiter erstreckt werden soll, so kommen gebrochene Zahlen, und die siebende harmonische Zahl wird $8\frac{4}{7}$ seyn.

Will man aber keine gebrochene Zahlen in der Progression haben, so darf man nur die Glieder der Progression mit dem Nenner des Bruchs (hier 7) multipliciren; so kommt statt

60; 30; 20; 15; 12; 10; $8\frac{4}{7}$

folgende Progression:

420; 210; 140; 105; 84; 70; 60.

§. 281.

Man hat aber auch harmonische Proportionen von 4 Gliedern; und in diesem Falle verhält sich die Differenz des anderen und ersten Gliedes zur Differenz des dritten und vierten, wie das erste zum vierten.

Aufgabe.

Man soll zu 3 gegebenen Zahlen die 4te harmonische Proportionalzahl finden.

Aufl.

erste Zahl = a
andere = b
dritte = c
vierte = x

$$b-a : x-c = a : x$$
$$bx - ax = ax - ac$$
$$bx - 2ax = -ac$$
$$2ax - bx = ac$$
$$x = \frac{ac}{2a-b}$$

Z. B. Zu 6, 8, 12 ist die vierte harmon. Zahl = 18;
denn 8—6 : 18—12 = 6 : 18
zu 2, 3, 5 ist sie 10;
denn 3—2 : 10—5 = 2 : 10

Aufgabe.

Man soll zur ersten und vierten Stelle einer harmonischen Proportion die zweyte und dritte finden.

Aufl. erste Stelle = a
zweyte = x
dritte = y
vierte = d

$x-a : y-x = a : y$ | $y-x : d-y = x : d$
$xy-ay = ay-ax$ | $yd-xd = xd-xy$
$xy+xa = 2ay$ | $yd = 2xd-xy$
$x = \frac{2ay}{y+a}$ | $x = \frac{yd}{2d-y}$
$\frac{2ay}{y+a} = \frac{yd}{2d-y}$
$\frac{2a}{y+a} = \frac{d}{2d-y}$
$4ad-2ay = dy+ad$
$3ad = dy+2ay$
$\frac{3ad}{d+2a} = y$

§. 282.

Es ist nicht möglich, aus zwey Zahlen, deren Differenz entweder grösser als die kleinste von beyden, oder nur der kleinsten gleich ist, eine aufsteigende har-

harmonische Progression hervorzubringen. Wir bemerken ferner:

1.) daß, wenn die beyden lezten Zahlen einer aufsteigenden stetigen Proportion, im Falle jener zwey Zahlen sind, diese Propertion in keine Progression verwandelt werden kann.

2.) daß, wenn die beyden lezten Zahlen einer aufsteigenden harmonischen Progression in dem Falle jener zwey Zahlen sind, diese Progression nicht weiter fortgesezt werden kann. So kann die Proportion 2, 3, 6 nicht in eine Progression verwandelt, und die Progression 3, 4, 6, 12 nicht weiter ausgedehnet werden. Denn da dort die Differenzen zwischen 3 und 6 der kleinsten Zahl 3 von beyden, und hier die Differenz zwischen 6 und 12 der kleinsten Zahl 6 gleich ist, so bekommt man eine Nulle zum Rest, mit welcher in das Produkt der beyden Zahlen nicht dividirt, mithin nicht weiter operirt werden kann.

Anders verhält es sich mit einer fallenden harmonischen Progression, bey welcher keine Ursache ist, warum sie nicht ins Unendliche fortgeführt werden könne, wenn auch gleich gebrochene Zahlen zu Hülfe genommen werden müssen, welche, wie schon oben gesagt, durch Multiplication der ganzen Progression mit dem Nenner der Brüche, in ganze Zahlen verwandelt werden können. Demnach kann

Jede harmonische Progression wohl unendlich kleiner, aber nicht unendlich grösser werden.

§. 283.

Eine harmonische Progression mag steigend oder fallend seyn, so heißt sie vollständig, wenn die beyden grösten Zahlen sich wie 1 : 2, oder 2 : 1 verhalten. Z. B. die Progression

10, 12, 15, 20, 30, 60; oder fallend:

60, 30, 20, 15, 12, 10

ist vollständig, weil die beyden grösten Zahlen 30 und 60 sich wie 1 : 2 verhalten. In einer solchen vollständigen Progression ist beständig der Quotient der beyden äussersten Glieder der Anzahl der Glieder gleich.

Z. B. In 3, 4, 6, 12 sind vier Glieder, und der Quotient von 3 in 12 ist 4. Wenn der Quotient sich nicht auf diese Art gegen die Zahl der Glieder verhält, so ist die Progression unvollständig; z. B. 10, 12, 15, 20. hier fehlen annoch die beyden Glieder 30 und 60.

§. 284.

Wenn man eine einfache arithmetische und eine harmonische Proportion mit einander vergleicht, so findet man, daß von drey arithmetischen Proportionalen, das Produkt von der ersten in die zweyte, ingleichem aus der ersten in die dritte, und endlich aus der zweyten in die dritte eine harmonische Proportion gibt.

Z. B. Es seyen die drey arithmetische Proportionalen 2, 4, 6. Wenn nun 2.4 = 8, und 2.6 = 12, und 4.6 = 24: so entstehet daher die harmonische Proportion 8, 12, 24, oder durch die Reduktion 2, 3, 6.

Man

Man kann demnach auch nicht nur arithmetische Progressionen zu Hervorbringung harmonischer anwenden; sondern auch jede harmonische Progression auf eine einfache arithmetische Progression zurückführen.

Aufgabe.

Man soll jede einfache arithmetische Progression in eine harmonische verwandlen.

Aufl. Man multiplicire die gegebenen arithmetischen Progressionalzahlen mit einander, und dividire das Produkt mit jeder Zahl besonders.

Z. B. Es seyen die vier arithmetische Zahlen 3, 4, 5, 6.

so ist $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360$

und $\frac{360}{6} = 60$; $\frac{360}{5} = 72$; $\frac{360}{4} = 90$;

$$\frac{360}{3} = 120$$

man erhält also die harmonische Progression

60, 72, 90, 120.

oder in den kleinsten Zahlen

10, 12, 15, 20.

Aufgabe.

Man soll jede harmonische Progression in diejenige einfache arithmetische, aus der sie entstanden, wieder versetzen.

Aufl. Man multiplicire zwey Glieder aus der harmonischen Progression, welche es seyen, und dividire das Produkt mit jedem Gliede besonders. Die Quotienten können hernach durch einen gemeinschaftlichen Divisor reducirt werden. Wenn aber die beyden multiplicirten Glieder nicht durch jedes Glied ohne Bruch divi-

dirt werden können, so multiplicire man zwey andere Glieder.

Z. B. Es sey die harmonische Progression 10, 12, 15, 20; oder 20, 15, 12, 10. man multiplicire nun das zweyte und dritte Glied 15. 12 = 180, so ist

$\frac{180}{20} = 9$; $\frac{180}{15} = 12$; $\frac{180}{12} = 15$; $\frac{180}{10} = 18$

also kommt die harmon. Progr. 9, 12, 15, 18

oder reducirt 3, 4, 5, 6.

Anmerkung. Unter den verschiedenen einfachen arithmetischen Progressionen gibt die einzige, 1, 2, 3, 4. ꝛc. mit ihren Multiplis, als 2, 4, 6, 8 ꝛc. oder 3, 6, 9, 12 ꝛc. oder 4, 8, 12, 16 ꝛc. u. s. w. eine vollständige harmonische Progression; da hingegen alle von den übrigen Arten der arithmetischen Progression abstammende harmonische unvollständig sind. Z. B. von 1, 3, 5, 7. ꝛc. 1, 4, 7, 10 ꝛc. 1, 5, 9, 16 u. s. w.

§. 285.

Wenn man eine gegebene Zahl durch die Glieder einer stetigen arithmetischen Proportion dividirt, so findet man, daß die 3 Quotienten eine harmonische Proportion geben.

Z. B. Es sey die Zahl 18; diese durch 1, 2, 3 dividirt, gibt die harmonische Proportion 6, 9, 18, oder reducirt 2, 3, 6. Dividirt man eben diese Zahl 18 mit 1, 3, 5, so kommt die harmon. Proportion $3\frac{3}{5}$, 6, 18, oder in ganzen Zahlen (mit 5 multiplicirt) 18, 30, 90; oder reducirt, 3. 5, 15.

Es können demnach auf solche Art ebenfalls harmonische Progressionen hervorgebracht werden.

Z. B. man dividire die Zahl 48 mit der Progression 1, 2, 3, 4,
so kommt die harmon. Progr. 12, 16, 24, 48
oder reducirt 3, 4, 6, 12.

§. 286.

Wenn man eine vollständige harmonische Progression untersucht, so wird man wahrnehmen, daß sich die verschiedenen Glieder derselben, von dem grösten bis zum kleinsten gerechnet, wie $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$ u. s. w. mit beständig wachsenden Nennern und Zählern, hingegen von dem kleinsten bis zum grösten, wie $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ u. s. w. mit unendlich höher anfangenden Rationen, verhalten.

Es sey die harmonische Progression:
60, 30, 20, 15, 12, 10; oder
10, 12, 15, 20, 30 60.
In dieser Progression ist 60 : 30 = 2 : 1
30 : 20 = 3 : 2
20 : 15 = 4 : 3
15 : 12 = 5 : 4
12 : 10 = 6 : 5
Und umgekehrt ist 10 : 12 = 5 : 6
12 : 15 = 4 : 5
15 : 20 = 3 : 4
20 : 30 = 2 : 3
30 : 60 = 2 : 1

Da die Folge der Verhältnisse auf vorhergehende Art in allen harmonischen Progressionen statt findet, so gibt es Anlaß zu folgenden Aufgaben.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen einzigen Zahl, nach der erklärten Folge der Verhältnisse, eine absteigende harmonische Progression hervorzubringen.

Aufl.

1.) Man nehme $\frac{1}{2}$ aus der gegebenen Zahl, um ein zweytes Glied zu der verlangten Progression zu erhalten.

2.) man nehme $\frac{2}{3}$ aus dem zweyten Gliede, um ein drittes Glied zu erhalten.

3.) man nehme $\frac{3}{4}$ aus dem dritten Gliede, um ein viertes Glied zu erhalten.

4.) Auf ähnliche Art fahre man fort, mit beständig zunehmenden Zählern und Nennern, bis die Progression so viele Glieder hat, als man verlangt.

Z. B. Es sey die gegebene Zahl 60.

$\frac{1}{2}$ aus 60 ist 30

$\frac{2}{3}$ aus 30 ist 20 $\left(= \frac{2 \cdot 30}{3}\right)$

$\frac{3}{4}$ aus 20 ist 15 $\left(= \frac{3 \cdot 20}{4}\right)$ u. s. w.

Soll nun die Progression aus nicht mehr, als 6 Gliedern bestehen, so wird solche 60, 30, 20, 15, 12, 10.

Aufgabe.

Aus einer gegebenen einzigen Zahl, nach der vorhin erklärten Folge der Verhältnisse, eine aufsteigende harmonische Progression, von einer bestimmten Anzahl Glieder, hervorzubringen.

Aufl.

Aufl.

1.) Man formire aus der Anzahl der Glieder, und der zunächst vor ihr hergehenden kleineren Zahl einen Bruch, so, daß die grössere Zahl den Zähler, und die kleinere den Nenner abgibt. Wenn z. B. die Anzahl der Glieder 6, so ist der Bruch $\frac{6}{5}$; ist solche 7, so ist der Bruch $\frac{7}{6}$ u. s. w.

2.) Man gehe mit um 1 abnehmenden Zählern und Nennern bis auf den Bruch $\frac{2}{1}$ zurück, und schreibe die Brüche hinter einander hin. Z. B. Wenn die Anzahl der Glieder 6 seyn soll, so sind die Brüche $\frac{6}{5}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{1}$.

3.) Man nehme nun $\frac{6}{5}$ aus der gegebenen Zahl; $\frac{5}{4}$ aus der kommenden zweyten; $\frac{4}{3}$ aus der kommenden dritten; u. s. w. bis die Progression durch $\frac{2}{1}$ geschlossen wird.

Z. B. Es sey 10 die gegebene Zahl, und die Progression soll aus 6 Gliedern bestehen.

Also $\frac{6}{5}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{1}$.

Wenn nun $\frac{6.10}{5} = 12$; $\frac{5.12}{4} = 15$;

$\frac{4.15}{3} = 20$; $\frac{3.20}{2} = 30$; und $\frac{2.30}{1} = 60$

so erhält man die harmonische Progression:

10, 12, 15, 20, 30, 60.

Aufgabe.

Zwischen zwey gegebenen Zahlen alle mögliche Mittelproportionale zu finden, und also eine vollständige harmonische Progression zu formiren.

Aufl.

1.) Man dividire die beyden gegebenen Zahlen; der Quotient gibt die Anzahl der erforderlichen Glieder.

2.) Man verzeichne, wie in voriger Aufgabe, so viele Brüche, weniger zwey, als Glieder erfordert werden, und fange solche von $\frac{1}{2}$ an

3.) Man dividire in die gröste beyder Zahlen mit jedem Nenner besonders; oder nehme $\frac{1}{2}$ aus der grösten Zahl; $\frac{2}{3}$ aus dem kommenden Gliede; $\frac{3}{4}$ aus dem folgenden. u. s. w.

Z. B. Es seyen die beyden Zahlen 64 und 8. oder 8 und 64. Wenn nun $\frac{64}{8}=8$; so werden überhaupt 8 Glieder zur Progression erfordert. Man braucht also auch eben so viele Brüche, weniger zwey; und also die folgende: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$. Wenn man nun mit den Nennern derselben in 64 dividirt, so stellt sich die ganze Progression in folgenden acht Zahlen dar:

64; 32; $21\frac{1}{3}$; 16; $12\frac{4}{5}$; $10\frac{2}{3}$; $9\frac{1}{7}$; 8.

Wenn man die Nenner der Brüche 3, 5, 3, 7 unter einander, und mit dem Produkte wieder jede Progressionale besonders multiplicirt, so hat man die Progression in ganzen Zahlen:

3.5.3.7 = 315; also

64	32	$21\frac{1}{3}$	16	$12\frac{3}{4}$	$10\frac{2}{3}$	$9\frac{1}{7}$	8
315	315	315	315	315	315	315	315
20160.	10080.	6720.	5040.	4032.	3360.	2880.	2520.
12)							
1680.	840.	560.	420.	336.	280.	240.	210.

Anmer-

Anmerkungen.

1.) Wenn die beyden gegebenen Zahlen unter einander dividirt, einen Bruch zum Quotienten geben, so findet zwischen ihnen keine vollständige Progression statt, obgleich Mittelproportionale gefunden werden können. Z. B. die Zahlen 140 und 60. deren Quotient $2\frac{1}{3}$. sie geben, die Mittelzahlen 140, 105, 84, 70, 60. denen zu einer vollständigen Progression noch die Zahlen 420 und 210 manglen.

2.) Wenn die beyden gegebenen Zahlen sich wie 2 : 1 oder 1 : 2 verhalten, so findet ebenfalls keine vollständige Progression statt, obgleich Mittelproportionale hinzugefügt werden können. Es seyen die beyden Zahlen 140 und 70 = 2 : 1. Zwischen diese Zahlen können die Mittelproportionale 105 und 84 gestellet werden. Allein erst folgende ist eine vollständige Progression: 420, 210, 140, 105, 84, 70. (S. §. 280.)

§. 287.

Man hat auch sogenannte Contraharmonische Proportionen. In ihnen verhält sich die Differenz des kleinsten und mittelsten Gliedes zur Differenz des mittelsten und grösten, wie das gröste Glied zum kleinsten.

Dergl. sind z. B. die Zahlen 3. 5. 6
da ist $5-3 : 6-5 = 6 : 3$

*) Wenn die contraharmonische Proportion zwischen 4 Zahlen statt finden, und sie also unstetig seyn soll; so muß sich die Differenz des ersten und zweyten Gliedes zur Differenz des drit-

ten und vierten verhalten, wie das vierte zum ersten. Z. B. in den vier Zahlen

8, 10, 15, 16 ist

10 — 8 : 16 — 15 = 16 : 8.

Demnach ist, wie auch schon die Lage der Differenzen anzeigt, eine contraharmonische Proportion nichts anders, als eine umgekehrte harmonische Proportion.

Der Raum erlaubet nicht, mehreres von ihnen zu sagen.

Das vierte Kapitel.

Vom Newtonischen Parallelogramm, nebst weiteren Betrachtungen über die Eigenschaften der Reihen.

§. 288.

Bey Erfindung unendlicher Reihen gewinnet man dadurch eine ungemeine Erleichterung, wenn man die gesuchte Reihe als schon gefunden annimmt, und die unbestimmte Coefficienten jedes Gliedes der angenommenen Reihe aus den Umständen der Grösse, in die eine solche Reihe aufzulösen ist, bestimmt. Schon Leibniz erwähnet dieser Methode Act. Erud. Lipf. Menf. Apr. 1693. p. 178 - 180. *)

*) Cum antea feries infinitæ fuerint quæfitæ cum primo inventore, *Nic. Mercatore*, per diviſiones, et cum *Iſ. Newtono* per extractiones; viſum mihi fuit, poſſe ad eas

eas perveniri commodius et universalius per suppositionem ipsius seriei quæsitæ, tanquam inventæ, ita, ut terminorum cöefficientes ex successu definirentur.

§. 289.

Will man also eine solche Reihe als schon gefunden annehmen, und man weißt das Gesetz ihres Fortgangs nicht zum Voraus, so muß man eine sichere Vorschrift haben: 1.) wie man in Ansehung der Exponenten die Reihe anfangen solle? 2.) was für ein Gesetz sie in ihrem Fortgang beobachten werde? d. i. man muß die Form der Reihe wissen. Z. B. die angenommene Reihe sey $Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+2d}$.... so muß man m und d vorher bestimmt haben, ehe man die Coefficienten A, B, C ꝛc. suchen kann.

In sehr vielen Fällen kann man die Form der Reihe aus den Umständen einer gegebenen Gleichung beurtheilen. Weil aber dieses in verwickelten Gleichungen sehr schwehr wird, so hat Newton ein allgemeines und fast mechanisches Hülfsmittel dazu an die Hand gegeben: seine Erfindung heißt das Newtonische Parallelogramm.

Dieses ist nun ein gewöhnliches Parallelogramm, das in lauter gleiche Quadrate eingetheilt ist. Daraus folgt schon:

1.) Wenn durch zwey nächst auf einander folgende Winkelpunkte eine gerade Linie gezogen wird; so muß dieselbe alsdann, wann sie verdoppelt wird, allemal den dritten Winkelpunkt antreffen.

2.) Wenn mit dieser Linie eine andere, die derselben gleich ist, von einem nach Gefallen ange-

nommenen Winkelpunkt an parallel gezogen wird: so sind die äussersten Punkte dieser Parallellinie ebenfalls zwey nächst auf einander folgende Winkelpunkte.

Alles dieses fließt aus geometrischen Gründen.

§. 290.

In Rücksicht auf die in die Fächer einzuschreibende Grössen wollen wir nun

I.) in Ansehung des Gesetzes der Fortschreitung folgendes bemerken.

Den Bruch $\frac{1}{a+bx}$ kann man durch wirkliche Division nach den gewöhnlichen Regeln der BuchstabenRechenkunst in eine unendliche Reihe verwandlen.

Aber eben dieses kann man auch thun, wenn man sezt: $\frac{1}{a+bx} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots\ldots$ wo nun freylich die Coefficienten A, B, C ꝛc. müssen bestimmt werden. Daraus folgt, wenn man mit $a+bx$ multiplicirt,

$$1 = aA + aBx + aCx^2 + aDx^3 + aEx^4 + \text{ꝛc.}$$
$$+ bAx + bBx^2 + bCx^3 + bDx^4 + \text{ꝛc.}$$

Also wird $1 = Aa$, oder $A = \frac{1}{a}$; denn wenn $x = o$, bleibt $1 = aA$. Auf eben diese Art bleibt, wenn man mit x dividirt, und wieder $x = o$ sezt, $aB + bA$ übrig. Dieses gibt $B = \frac{-bA}{a} = \frac{-b}{a^2}$. Eben so ist $C = \frac{-bB}{a} = \frac{b^2}{a^3}$;

D=

$D = \frac{-bC}{a} = \frac{b^3}{a^4}$; $E = \frac{-bD}{a} = \frac{b^4}{a^5}$ und

$$\frac{1}{a+bx} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}x + \frac{b^2}{a^3}x^2 - \frac{b^3}{a^4}x^3 + \frac{b^4}{a^5}x^4 - \text{ꝛc.}$$

Wo das Gesetz der Fortschreitung deutlich genug in die Augen fället.

Sezt man auf eben diese Art:

$$\frac{1}{(a+x)^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \text{ ꝛc.}$$

so hat man, weil

$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$

$1 = a^2A + a^2Bx + a^2Cx^2 + a^2Dx^3 + a^2Ex^4$ ꝛc.

$+ 2aA + 2aB + 2aC + 2aD$ ꝛc.

$+ A + B + C$

Also $1 = a^2A$; $A = \frac{1}{a^2} = a^{-2}$

$$B = \frac{-2aA}{a^2} = \frac{-2}{a^3} = -2a^{-2}$$

$$C = \frac{-A-2aB}{a^2} = \frac{-1}{a^4} + \frac{4}{a^4} = \frac{3}{a^4} = +3a^{-4}$$

$$D = \frac{-B-2aC}{a^2} = +\frac{2}{a^4} - \frac{6}{a^5} = -4a^{-5}$$

$$E = \frac{-C-2aD}{a^2} = \frac{-3}{a^6} + \frac{8}{a^6} = +5a^{-6}$$

Also $\frac{1}{(a+x)^2} = (a+x)^{-2} = a^{-2} - 2a^{-3}x + 3a^{-4}x^2 - 4a^{-5}x^3 + 5a^{-6}x^4 - \text{ꝛc.}$

Hier fällt ebenfalls das Gesetz der Fortschreitung wieder sehr deutlich in die Augen, da jeder Coefficient aus den beyden vorhergehenden immer auf einerley Art bestimmt wird.

Gesezt, man habe eine Gleichung $y^3 + a^2y + + axy - 2a^3 - x^3 = 0$. Man will y durch eine Reihe, die nach x geordnet ist, ausdrücken. Wenn man nun für y die allgemeine Reihe

$$y = Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+3d} + Dx^{m+4d} + \text{&c.}$$

sezt, wo nicht allein die Coefficienten, sondern auch die Exponenten müssen bestimmt werden, so sieht man gleich ein, daß das Glied axy solche Exponenten gibt, die um 1 grösser sind, als die Exponenten der Reihe, die aus a^2y entstehet, und daß daher d, der Unterschied der Exponenten in der Reihe für y auch $\pm$ seyn müsse, weil sonst die Exponenten in der Reihe für y^3 nicht um 1 unterschieden seyn, und mit denen aus den anderen Reihen für a^2y und axy nicht in einer Reihe fortlauffen werden: und wodurch man wenigstens sonst in Gefahr käme, nicht alle Glieder der Reihe für y zu bekommen. Ferner muß in der Reihe für y ein Glied vorkommen, dessen Exponent $= 0$ ist, damit das Glied $2a^3$ irgendwozu könne gerechnet werden: d. i. entweder ist $m = 0$, oder es bekommt auch noch einen anderen Werth, daß es mit d, oder 2d, oder 3d. &c. den Werth $= 0$ ausmache.

Man sezze also $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^4 + + Ex^5 + \text{&c.}$ so ist

$$\left.\begin{aligned} y^3 = {} & A^3 + 3A^2Bx + 3AB^2x^2 + B^3x^3 \\ & + 3A^2C + 6ACB.... \\ & + 3A^2D.... \\ & + Aa^2D.... \\ & + AaC.... \\ & - 1 \end{aligned}\right\} = 0$$

$a^2y =$

$a^2y = a^2A + a^2B + a^2C$
$axy = \quad + aA + aB$
$-2a^3 = -2a^3$
$-x^3 = -x^3$

Weil nun jeder Coefficient = o seyn muß, so gibt dies so viele Gleichungen, als man Coefficienten zu bestimmen Lust hat.

So ist $A^3 + a^2A - 2a^3 = o$, welches $x = a$ gibt.

Ferner ist $3A^2B + a^2B + aA = o$ also

$$B = \frac{-1}{3+1} = \frac{-1}{4}$$

Ferner, $3AB^2 + 3A^2C + a^2C + aB = o$

oder $\frac{3}{16} + 4aC + -\frac{1}{4} = o$

das ist, $C = \frac{1}{64}a$

Ferner gibt der Coefficient von x^3, $\frac{-1}{64} - \frac{3}{128} +$

$+ 4a^2D + \frac{1}{64} - 1 = o$

oder $4a^2D = \frac{131}{128}$

d. i. $D = \frac{131}{512a^2}$

Auf diesem nemlichen Wege würde man die übrigen Coefficienten auch finden können; die bisher gefundenen geben die Reihe

$$y = a - \frac{1}{4}x + \frac{1}{64a}x^2 + \frac{131}{512a^2}x^3 + \text{ꝛc.}$$

Durch diese Reihe findet man einen Werth für y, der sich desto mehr nähert, je kleiner x in Ansehung von a ist. Wenn aber x in Ansehung von a groß ist, so müßte man eine Reihe suchen, wo die Potenzen von x immer abnehmen.

Es lassen sich auch überhaupt aus einer Gleichung zwischen x und y mehrere Reihen für y finden, und zwar folgendergestalt. Man setze

$y = Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+2d} + Dx^{m+3d} +$
$+ Ex^{m+4d} +$ ꝛc.

Dieses ist nemlich die allgemeinste Reihe, die nach fallenden und steigenden Exponenten von x geordnet seyn kann; die auch diejenige Reihen begreift, wo die Exponenten von x nicht in einer arithmetischen Reihe fortgehen, wenn nemlich einer oder mehrere Coefficienten von x Nichts würden. Die Reihe läßt sich auch so ausdrücken: $x^m (A + Bx^d + Cx^{2d} + + Dx^{3d} + Ex^{4d} + \ldots)$ woraus sich die Potenzen von y folgendergestalt ausdrücken lassen:

$$y^3 = A^3x^{3m} + 3A^2Bx^{3m+d} + 3AB^{2d+3m} + B^3x^{3d+3m} + 3AAC + 6ACB + 3A^2D$$

$$2ay = a^2Ax^m + a^2Bx^{m+d} + a^2Cx^{m+2d} + + a^2Dx^{m+3d}$$

$$axy = aAx^{m+1} + aBx^{m+d+1} + aCx^{m+2d+1} + + aDx^{m+3d+1}$$

$$-2a^3 = -2a^3$$

$$-x^3 = -x^3$$

Diese Bildung der Reihen ist schon oben gelehrt worden; wir haben inzwischen diese Beyspiele nicht blos zur nöthigen Uebung angeführt, sondern wollen sie nun zu einem ganz anderen Gebrauch anwenden.

Man siehet nemlich, daß es in diesem und jeden anderm Falle nur darauf ankomme, die verschiedene Reihen so unter einander zu schreiben, daß immer die Exponenten, die unter einander zu stehen kommen, einander gleich sind. Hieraus werden sich m und d durch die Vergleichung mit den gegebenen Exponenten 0 und 3 bestimmen; die Coefficienten werden sich darauf, wie oben, geben.

§. 291.

§. 291.

Es verwandelt sich nemlich nunmehr die Aufgabe eigentlich in diese:

Es sind verschiedene unbestimmte arithmetische Reihen gegeben; man soll sie so über einander schreiben, daß die Glieder, die über einander stehen, sich jedesmal unter sich bestimmen, und einige von ihnen einen gewissen bestimmten Werth bekommen.

Dabey kann man hernach noch weiter fragen:

Auf wie vielerley Art dies geschehen könne?

Vollständige arithmetische Reihen würden in einem solchergestalt geordneten Schema folgende Gestalt haben:

$-2m+3b$	$-m+3b$	$3b$	$m+3b$	$2m+3b$	$3m+3b$
$-2m+2b$	$-m+2b$	$2b$	$m+2b$	$2m+2b$	$3m+2b$
$-2m+b$	$-m+b$	b	$m+b$	$2m+b$	$3m+b$
$-2m$	$-m$	o	m	$2m$	$3m$
$-2m-b$	$-m-b$	$-b$	$m-b$	$2m-b$	$3m-b$
$-2m-2b$	$-m-2b$	$-2b$	$m-2b$	$2m-2b$	$3m-2b$
$-2m-3b$	$-m-3b$	$-3b$	$m-3b$	$2m-3b$	$3m-3b$

Im vorigen Beyspiel würden die Reihen also geschrieben werden:

$3m$,	$3m+d$,	$3m+2d$,	$3m+3d$
*	*	*	*
m,	$m+d$,	$m+2d$,	$m+3d$
	$m+1$,	$m+d+1$,	$m+2d+1$
o,			3,

(die Sternchen bedeuten, daß die Reihe von y^2 fehlet.)

Dieses gäbe $m=0$, und $d=+1$, wie oben schon gefunden worden. Man hätte auch $m+1$ unter $m+2d$ schreiben können; dadurch wäre $2d=1$, oder $d=\frac{1}{2}$ geworden. Man hätte $m+1$ noch weiter hinaus setzen können. Man siehet aber, daß alsdann in dem zu $3m+d$ oder $m+d$ gehörigen Coefficienten $3A^2B+a^2B$, $B=0$ seyn muß; daß also die Reihe doch $A+Bx+Cx^2$ ꝛc. oder $d=1$ eigentlich werden wird. Ueberhaupt aber ist zu bemerken, daß, wenn in dem Exponenten ausser m oder $2m$ ꝛc. blos noch d vorkommt, alsdann in dem Coefficienten B vorhanden sey: daß also, wenn man keine andere als dergleichen Exponenten unter einander schreibt, in allen Theilen des Coefficienten B als Faktor vorkommt, folglich $=0$ seyn muß. Ferner ist bey allen Exponenten, wo ausser m, $2m$, $3m$ ꝛc. blos noch $2d$ vorkommt, entweder B^2 oder C im Coefficienten; wenn man also blos dergleichen Exponenten unter einander schreibt, und vorher $B=0$ gefunden ist, wird ebenfalls $C=0$ seyn. Dies wird so lange dauren, bis man auf eine Reihe von Exponenten trifft, wo ausser m und d noch eine bestimmte Zahl vorhanden ist.

Die Reihen der Exponenten können auch also stehen:

$3m$,	$3m+d$,	$3m+2d$,	$3m+3d$
*	*	*	*
		m,	$m+d$
	$m+1$,	$m+d+1$,	$m+2d+1$
3			0

Dies gibt $3m=3$, oder $m=1$; ferner $3m+d=$ $=m+1$, oder $d=-1$, wodurch die unter einander stehenden Exponenten immer einander gleich bleiben.

Man

Man könnte noch auf andere Arten die Reihen unter der gesezten Bedingung unter einander schreiben; dies würde aber nur die obigen Reihen geben, die nur bey einem anderen Gliede angefangen wären.

§. 292.

II.) In Ansehung der verhältnißmäßigen Grösse dieser eingeschriebenen Werthe ist nun folgendes zu bemerken:

1.) Ueberhaupt: Um die verschiedenen Reihen bequem zu bestimmen, bemerke man, daß, wenn y die Reihe der Exponenten $m, m+d, m+2d, m+3d$ gibt, alsdann y^2 gebe $2m, 2m+d, 2m+2d, 2m+3d$, und y^3 die Reihe $3m, 3m+d, 3m+2d, 3m+3d$ u. s. w.
Eben so gibt y^{-1} die Reihe
$-m, -m+d, -m+2d, -m+3d,$
y^{-2} gibt
$-2m, -2m+d, -2m+2d, -2m+3d$
wo beyderseits d auch negative Werthe haben kann. Sezt man nun z. B. m und $2m+d$ gleich, so werden auch $m+d$ und $2m+2d$; $m+2d$ und $m+3d$ u. s. w. einander gleich. Eben so, wenn $m = 3m+d$, wie auch $m+d = 3m+2d$; $m+2d = 3m+4d$.

2.) Die horizontalen und vertikalen Reihen des oben gegebenen vollständigen Schema sind in einer arithmetischen Progression; und wenn also zwey Glieder daraus einander gleich gesezt werden, so sind alle in derselben Reihe befindliche Glieder einander gleich.

3.) Wenn man wirkliche Fächer zeichnet, und durch zwey nächst auf einander folgende Win-

kelpunkte eine gerade Linie ziehet, (ein Lineal legt) so sind alle Werthe der Winkelpunkte, durch welche das Lineal gehet, in einer arithmetischen Reihe.

4.) Wenn die zwey erstere Werthe, durch welche das Lineal auf die beschriebene Art gehet, einander gleich gesezt werden, so geht das Lineal durch lauter gleiche Werthe. Und dieser, nebst dem vorigen Satz, gilt auch von allen parallelen Lagen des Lineals.

5.) Das Lineal kommt jederzeit an grössere Werthe, wenn es nach oben zu, und an kleinere, wenn es nach unten zu bewegt, und überall der gehörige Werth für m gesezt wird.

α.) Unter die grösseren Werthe werden auch die negative abnehmende gerechnet.

β.) Auf diesem 5ten Satz beruhet auch die Bestimmung der Werthe für m entweder bey steigenden oder bey fallenden Reihen, wie unten wird gezeigt werden.

§. 293.

Noch ist übrig, auch die Reihen, die aus solchen Gliedern entstehen, worinn x, oder blos eine beständige Grösse befindlich ist, gehörig zu ordnen. Wenn man in der gegebenen Gleichung für y setzet Ax^m, so bekommt man alle Anfangsglieder der Reihen. Unter diesen werden zwey einander gleich gesezt, wodurch der Werth von m sich bestimmt. Diese beyden sind entweder vielfache von m, z. B. 3m und m, oder ein vielfaches von m, nebst einer gewissen Zahl, z. B. 3m und m+1; ordentlich ein vielfaches von m und eine bestimmte Zahl, z. B. 3m und 3, oder ein vielfaches

faches von m nebst einer bestimmten Zahl, und eine gewisse Zahl, z. B. $m+1$ und 3. In beyden ersten Fällen wird in dem zweyten Exponenten beyder Reihen d vorkommen, also $B=0$ seyn; in den beyden anderen Fällen würde blos der zweyte Coefficient der einen Reihe da seyn, als auch $B=0$ werden. Daher muß sich mit dem zweyten Exponenten eine von den übrigen Reihen anheben, das heißt, einer von den übrigen Exponenten, die man erhalten hat, da man für y sezte Ax^m; ist der zweyte Exponent, und gibt also die Grösse d. Weil nun aber dieser übrigen Exponenten mehr seyn können, so muß man den kleinsten Unterschied derselben für d nehmen, damit keiner ausfalle, und in der Reihe keinen Platz erhalte. Wenn man nun diesen Werth für d und m in das Parallelogramm setzet, so zeigt es alles übrige an, was man noch zu wissen nöthig hat; nemlich die verschiedenen Arten von Reihen, die möglich sind, um y auszudrücken, und die Stelle, wo sich jede Reihe aus den verschiedenen Gliedern der Gleichung anfängt, welches leztere aber sich von selbst schon gibt.

Eigentlich kann man das Parallelogramm entbehren, um m und d zu finden; doch ist es dazu gut, daß man nicht falsche Reihen für y findet. Das Parallelogramm entdeckt sogleich, ob alle Exponenten in einer fallenden oder steigenden Reihe sind? oder ob es noch andere gebe, die nicht mit zur Reihe gehören? Gienge z. B. die gerade Linie durch 3m und $m+d=m+1$, so würde der Werth $3d=3$ nicht mit hineinkommen, wenn das Lineal sich unterwärts bewegt, oder wenn die Reihe fällt; hingegen würde 0 herausbleiben, wenn die Reihe stiege. Eben dies würde man auch schon dadurch entdecken, daß, da die Exponenten des ersten Gliedes jeder Reihe sind

$3m$, m, $m+1$, 0, 3, wenn $3m = m+1$ oder $m = \frac{1}{2}$, alsdann die übrigen Werthe $\frac{1}{2}$, 0, 3 seyn würden. Also wäre $d = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$, und die Reihe der Exponenten wäre $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, 0, ohne daß man den Exponenten $+3$ irgend wohin bringen könnte. Wäre $d = \frac{3}{2} - 0$, so wäre die Reihe $\frac{3}{2}$, $0 - \frac{3}{2}$, und 3 bliebe wieder aus. Endlich, wenn $d = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$; so, daß die Reihe $\frac{3}{2}$, 3, $\frac{5}{2}$, so bliebe 0, und $\frac{1}{2}$ heraus. Dieses zeigt das Parallelogramm mit einemmale, weil man gleich siehet, ob überhalb des Lineals noch Exponenten liegen bleiben.

S. die Abhandl. über das Newtonianische Parallelogramm. Neues Hamburg. Magazin. XXXI. Stück.

§. 294.

Wir wollen noch weitere Anwendungen des Parallelogramms zeigen, vorher aber folgende Betrachtungen über die Reihen voraus schicken.

I.) Wenn die Reihe

$$y = Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+2d} \ldots\ldots + + Rx^{m+rd} \ldots\ldots$$

auf die Potenz z erhoben wird, so ist bey der dadurch entstehenden neuen Reihe zweyerley zu beobachten:

1.) in Ansehung der Exponenten. Das Gesetz, das diese in ihrem Fortgang beobachten, ist folgendes:

$$y^z = \alpha x^{mz} + \beta x^{mz+d} + \gamma x^{mz+2d} \ldots + + \varrho x^{mz+rd} \ldots\ldots$$

2.) in Ansehung der Coefficienten A, B, C. Es fragt sich, in welchem Glied dieser neuen Reihe jeder der Coefficienten A, B, C ... R u. s. w.

das

das erstemal, und zwar in seiner ersten Dimension vorkommen werde?

a.) A kommt das erstemal in dem ersten Glied vor; aber in der Dimension κ.

b.) Von den folgenden kommt jeder in dem eben so vielten Glied das erstemal in der ersten Dimension vor, in welchem er in der ersten Reihe vorkam. Z. B. der zweyte in dem zweyten; der dritte in dem dritten; der rte in dem rten, u. s. w.

II.) Wenn man in der allgemeinen Gleichung

$$py^{\kappa}x^{\tau} + qy^{\varepsilon}x^{\eta} + ry^{\lambda}x^{\mu} + sy^{\varrho}x^{\pi} = o$$

überall die Reihe $Ax^m + Bx^{m+d} \ldots + Rx^{m+rd} \ldots$ für y sezt, so erhält man dadurch 4 Reihen. Diese 4 Reihen machen zusammen die Reihe der Gleichung aus; und jede von ihnen heißt eine Reihe eines Theils der Gleichung.

Z. B. Es sey $x^3 - a^2y + y^2x + y^3 = o$, und

$$y = Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+2d} \ldots + Rx^{m+rd} \ldots$$

so ist die Reihe der Gleichung:

1.) $A^3x^{3m} + \beta x^{3m+d} + \gamma x^{3m+2d} \ldots + \phi x^{3m+fd} \ldots$

2.) $A^2x^{2m+1} + bx^{2m+1+d} + cx^{2m+1+2d} \ldots + fx^{2m+1+fd} \ldots$ } $= o$

3.) $-Aa^2x^m - Ba^2x^{m+d} - Ca^2x^{m+2d} \ldots - Ra^2x^{m+rd} \ldots$

4.) x^3

III.) Begehret man nun aus diesen 4 Reihen eine einzige zu machen, so ist folgendes dabey zu betrachten:

1.) Man

1.) Man muß wissen, mit welchen Gliedern sich diese neue Reihe anfangen werde? Wir wollen diß-falls einige Versuche machen:

a.) Wir wollen annehmen, die zwey Glieder A^2x^{2m+1}; $-Aa^2x^m$ machen das erste Glied der neuen Reihe aus, und sehen, was daraus folge.

α.) Nach dieser Hypothese wären die Exponenten $2m+1$ und m einander gleich. Also $m=-1$.

β.) Die andern zwey ersten Glieder heissen also A^3x^{-3}; x^3. Nun sind zwey Fälle möglich:

א.) soll die Gleichungsreihe steigend seyn, so kann der Exponent -1 nicht vor dem Exponenten -3 vorkommen.

ב.) soll die Gleichungsreihe fallend seyn, so kann der Exponent -1 nicht vor dem Exponenten $+3$ vorkommen. Also kann das erste Glied der Gleichungsreihe nicht aus den zwey Gliedern A^2x^{2m+1}; Aa^2x^m bestehen.

b.) Nehmen wir an, das erste Glied der Gleichungsreihe enthalte die zwey Glieder A^3x^{3m}; x^3, so ist folgendes zu bemerken:

α.) Es ist $3m=3$; also $m=1$.

β.) Aus dieser Voraussetzung erhellet, daß, wenn sie bestehen kann, auch das Glied A^2x^{2m+1} zum ersten Gliede der neuen Reihe gehören werde, weil sein Exponent $2m+1$ $=3$ wird.

γ.) Daß aber diese Voraussetzung statt haben könne, siehet man daraus, weil das noch übrige erste Glied $Aa^2x^m=Aa^2x$ wird,

und

und also die Gleichungsreihe eine fallende ist.

c.) Setzen wir überhaupt zwey Exponenten einander gleich, und bestimmen daraus m, so sind folgende Stücke zu bemerken:

α.) Werden dadurch alle übrige Exponenten der ersten Glieder grösser, als dieser angenommene AnfangsExponent, so findet die Hypothese statt, und man ist auf einer steigenden Reihe.

β.) Werden alle übrige dadurch kleiner, so ist man auf einer fallenden Reihe.

γ.) Werden einige dadurch dem angenommenen AnfangsExponenten gleich, so gehören sie auch zum ersten Gliede.

δ.) Werden die übrigen theils grösser, theils kleiner, so können die zwey einander gleich gesezte Exponenten keine AnfangsExponenten seyn.

*) Anmerkung. Der Endzweck des Parallelogramms ist, daß man eine sichere Anzeige habe, welche Exponenten einander gleich gesezt werden müssen, um entweder eine steigende oder eine fallende Reihe zu erhalten.

d.) Setzen wir also $m = 1$, so sieht nunmehr die Reihe der Gleichung folgendergestalt aus:

$$\left.\begin{matrix} A^3 \\ A^2 \\ +1 \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} 3A^2B \\ +2AB \end{matrix}\right\} x^{3+d} + \left.\begin{matrix} 3(A^2C + AB^2) \\ +2AC + B^2 \end{matrix}\right\} x^{3+2d} \ldots$$
$$- Aa^2x - Ba^2x^{1+d} - Ca^2x^{1+d} \ldots$$

α.) Weil wir für die Hypothese $m = 1$ eine fallende Reihe haben, so bekommt d einen negativen Werth.

β.) Weil

β.) Weil das Glied $(A^3+A^2+1)x^3$ ein Glied der Gleichungsreihe, die $=0$, ist, so ist der Coefficient $A^3+A^2+1=0$, und also eine Gleichung für A.

2.) Nun wissen wir also den Anfang der Reihe. Es fragt sich aber ferner, wie die Reihe fortgehen, und was für einen Werth d bekommen werde? Hievon ist zu bemerken:

a.) Unter den ersten Gliedern der Reihe der Theile der Gleichung fangen sich zuerst nach den Anfangsreihen an

α.) das kleinste bey einer steigenden Reihe,

β.) das gröste bey einer fallenden Reihe.

b.) Einerley Coefficient kann in den verschiedenen Reihen der Theile der Gleichung an verschiedenen Orten das erstemal vorkommen.

c.) Wenn ein Coefficient der Gleichungsreihe, in welchem R zuerst vorkommt, weiter aus nichts, als aus den Coefficienten der Anfangsreihen bestehet: so muß R, als ein Faktor dieses Coefficienten, $=0$ werden, wenn nicht der andere Faktor durch das Verhalten der schon bestimmten Grössen gegen einander von sich selbst $=0$ wird.

*) Anmerk. Wenn aber der andere Faktor von sich selbst $=0$ wird, so wird R erst durch einen der folgenden Coefficienten der Gleichungsreihe bestimmt.

d.) Die Exponenten der Gleichungsreihe machen eben diejenige arithmetische Progression aus, in welcher die Exponenten der Anfangsreihen stehen.

e.) Daher muß d der gemeinschaftliche Unterschied der ersten Exponenten unserer Gleichung,

$3m; 2m+1; 3; m;$ seyn. Weil wir $m=1$ gesezt haben, so sind diese Exponenten $=3; 1.$ Es wird also $d=-2.$

Woraus folgende Gleichungsreihe entstehet:

$$\left.\begin{array}{l} A^3 \\ A^2 \\ 1 \end{array}\right\} x^3 + \left.\begin{array}{l} 3A^2B \\ +2AB \\ -Aa^2 \end{array}\right\} x + \left.\begin{array}{l} 3(A^2C+AB^2) \\ +2AC+B^2 \\ -Ba^2 \end{array}\right\} x^{-1} \ldots = 0$$

woraus sich A, B, C... bestimmen lassen, weil die Coefficienten jeglicher Potenz von x gleich o seyn müssen.

f.) Wenn man hier statt d einen kleineren gemeinschaftlichen Unterschied der Exponenten $3m; 2m+1; 3; m;$ setzen wollte, so wird man eben dieselben Reihen für y finden. Der grösste gemeinschaftliche Unterschied läßt sich nicht jederzeit gebrauchen.

S. M. Holland, Innhalt des Kästnerischen Vortrags vom Newtonischen Parallelogramm. 4. Tübingen. 1765.

§. 295.

Man hat so eben gesehen, daß man eine sichere Regel nöthig hat, welche von den Exponenten $3m, 2m+1, 3, m,$ einander gleich gesezt werden müssen, damit die übrigen alle entweder grösser oder kleiner werden. Man hat hiezu blos diese Exponenten in dem Parallelogramm gehörig zu ordnen. Es sey also die

Aufgabe:

Bey einer rationalen Gleichung, die zwey veränderliche Grössen enthält, die Gestalt der Reihe, oder m und d zu finden.

Auflösung.

I.) Man setze Ax^m statt y in die Gleichung; so verwandelt sie sich in einen Ausdruck, der nur x auf verschiedene Potenzen erhoben enthält.

II.) Die Exponenten dieser Potenzen ordne man, wie die vielfachen von m und b, hier nemlich ist $b = 1$. (§. 291.)

III.) Durch ein Paar der äussersten so geordneten Exponenten lege man das Lineal.

IV.) Soll die Reihe steigen, so wähle man dazu ein Paar der untersten Exponenten, das heißt, ein Paar, die so liegen, daß das Lineal keine mehr antrifft, wenn es, sich immer parallel, nach unten zu bewegt wird.

V.) Soll sie fallen, so wähle man ein Paar der obersten.

VI.) Man setze sie gleich, und bestimme daraus m, wie oben gelehret worden. Geht das Lineal zugleich durch mehrere äusserste Exponenten, so wird einerley Werth von m sie alle gleich machen.

VII.) Dieses gefundene m setze man in die übrigen Exponenten.

VIII.) Man suche den grösten gemeinschaftlichen Unterschied der Werthe, welche herauskommen. Er wird d seyn.

IX.) Die Coefficienten werden nach oben gegebener Anweisung bestimmt.

S. Kästner Anal. endl. Grössen §. 665. woraus auch folgende beyde erste Beyspiele genommen worden sind.

§. 296.

§. 296.

Beyspiele.

I.) Aus $y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$ wird (vermög vorigen §. 295. n. I.) ein Ausdruck, wo x folgende Exponenten nach der Ordnung, in welcher die Glieder der Gleichung stehen, bekommt: 3m; m; 0; m+1; 3; welche man (nach n. II.) also ordnen muß:

3
*
* m+1
0 m * 3m

Für eine steigende Reihe (IV.) gibt (III.) $0 = m = = 3m$; also (nach VI.) $m = 0$; die Werthe (VIII.) sind 0; 1; 3; ihr gröster gemeinschaftlicher Unterschied $1 = d$; also die Reihe $y = A + Bx + Cx^2 \ldots$.

Da ist $y = a - \frac{1}{4}x + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}$

Für eine fallende Reihe (V.) ist $3m = 3$; also $m = 1$. Die Werthe (VIII.) sind 3; 2; 1; 0, und also $d = -1$ und

$$y = Ax + B + Cx^{-1} + Dx^{-2} \ldots \text{ u. s. f.}$$

Hier werden die Anfangsreihen aus dem ersten und lezten Theile der Gleichung; man schreibe sie hier beyde zu oberst, und darunter nach der Ordnung, was aus dem zweyten, dritten, vierten Theile wird.

$$\left.\begin{matrix} A^3 \\ -1 \end{matrix}\right\} x^3 + 3A^2Bx^2 + 3AB^2x + B^3$$
$$+3A^2C + 6ABC$$
$$+3A^2D$$
$$+ a^2A + a^2B$$
$$- 2a^3$$
$$+ aA + aB + aC$$

Folgl. ist $A = 1$; nebst 2 unmöglichen Werthen;

$$B = -\frac{1}{3}a;$$

$$3.\frac{1}{9}a^2 + 3C + a^2 - \frac{1}{3}a^2 = 0$$

oder $C = -\frac{1}{3}a^2$

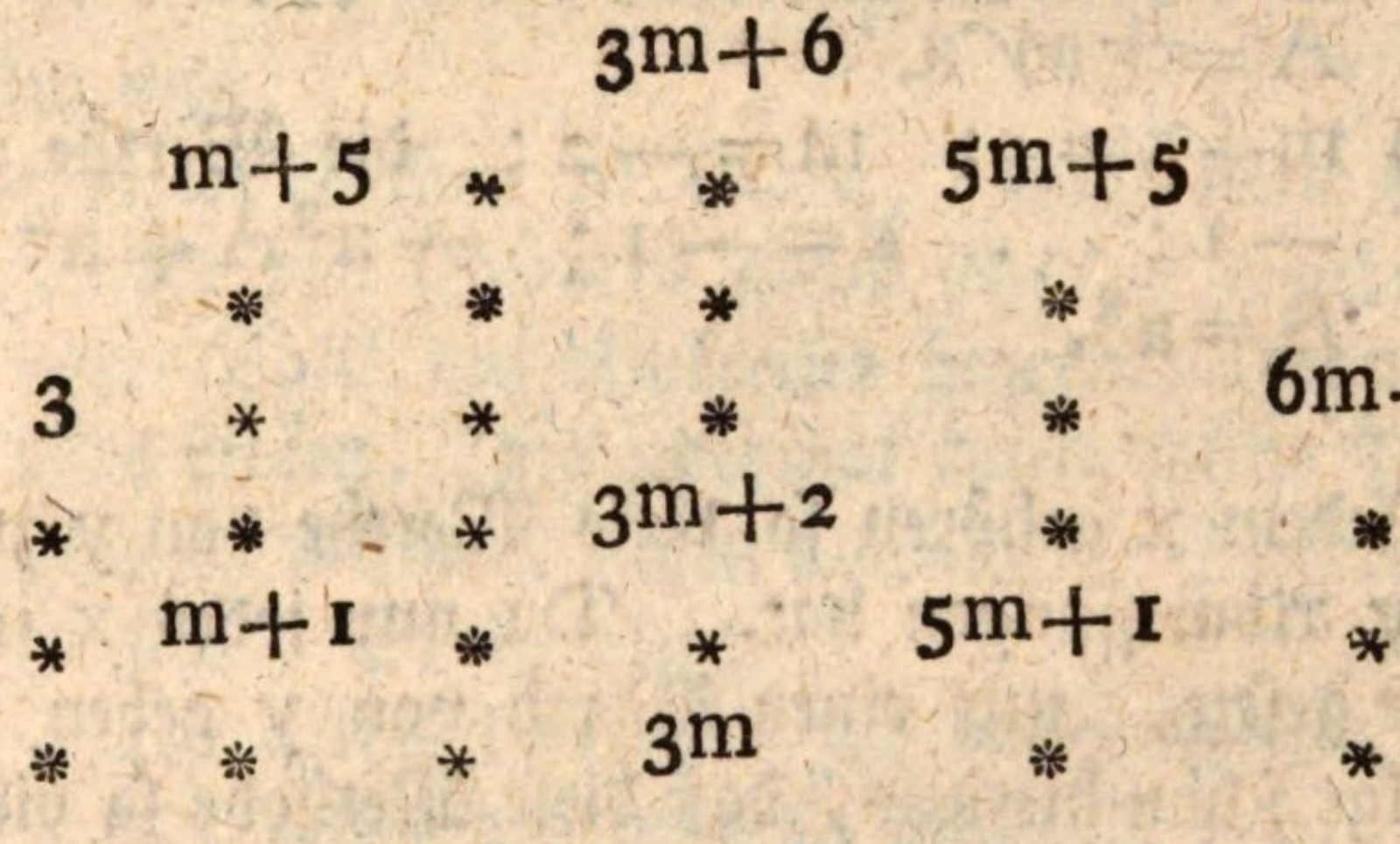
$D = \frac{5}{8}\frac{5}{1}a^3$ u. s. w.

*) Wenn man nemlich nach §. 294. verfähret, so enthält das erste Glied der Gleichungsreihe, lauter Theile, die nur durch A und bekannte Grössen gegeben werden: also gibt das Verfahren I. gewiß alle ersten Glieder der Anfangsreihen, und dabey noch erste Glieder anderer Reihen, welche sich von jenen dadurch unterscheiden, daß ihre Exponenten alle grösser oder kleiner sind. Wenn aber für gegenwärtige Anwendung in §. 291. $b = 1$, so werden alle Exponenten nach IV. grösser, und nach V. kleiner, als die äussersten; folglich geben IV, V, die ersten Exponenten der Anfangsreihen, und der Werth von m, der daraus bestimmt wird, daß man ein Paar der äussersten gleich gesezt hat, macht alle gleich, die zugleich äusserste sind, d. i. durch welche das Lineal zugleich gehet, wie VI. erfordert. Die übrigen Exponenten sind die ersten solcher Reihen, die nicht die Anfangsreihen sind, und sollen sich alle mit den ersten der Anfangsreihen in einer arithmetischen Progression befinden. Ihre Werthe sind durch die Exponenten, welche x und y in der Gleichung haben, und durch das nur gefundene m gegeben: und Werthe, an welche das Lineal zugleich trifft, sind gleich. Man muß also den Unterschied einer arithmetischen Progression suchen, in welcher sich alle diese Werthe befinden können.

IItes Beyspiel.

$$y^6x^3 - \frac{y^5x^5}{a} + x^6y^3 - a^3x^5y + a^6x^3 -$$
$$- a^7xy + a^6y^3 - a^3xy^5 + a^3x^2y^3 = 0$$

gibt nach I. folgende Exponenten; in der Ordnung, wie die Glieder stehen, $6m+3$; $5m+5$; $2m+6$; $m+5$; 3; $m+1$; $3m$; $5m+1$; $3m+2$; die nach II. also geordnet werden:



Hier kann man nun folgende Bestimmungen machen:

Für aufsteigende Reihen:

α.) $6m+3 = 5m+1$; $m = -2$; die Werthe der Exponenten, $-9, -8, -6$; $d = +1$; $A^6 - a^3A^5 = 0$; $A = a^3$; der Werth $A = 0$, gilt hier nicht.

β.) $5m+1 = 3m$; $m = -\frac{1}{2}$; die Werthe $-1\frac{1}{2}$, 0, $+\frac{1}{2}$; $d = \frac{1}{2}$; $-a^3A^5 + a^6A^3 = 0$, $A = \pm\sqrt{a}$.

γ.) $3m = m+1$; $m = \frac{1}{2}$; die Werthe, $1\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$...; $d = \frac{1}{2}$; $-a^7A + a^6A^3 = 0$; $A = \pm\sqrt{a}$.

δ.) $m+1 = 3$; $m = 2$; die Werthe $3, 6, 7$...; $d = 1$; $a^6x^3 - a^7A = 0$; $A = \frac{1}{a}$.

Für fallende Reihen:

ε.) $6m+3=5m+5$; $m=2$; die Werthe 15, 12, 11; $d=-1$; $A^6-\frac{A^5}{a}$; $A=\frac{1}{a}$.

ζ.) $5m+5=3m+6$; $m=\frac{1}{2}$; die Werthe $7\frac{1}{2}$, 6, $5\frac{1}{2}$,... $d=-\frac{1}{2}$; $A^5+A^3=0$. $A=\pm\sqrt{a}$.

θ.) $3m+6=m+5$; $m=-\frac{1}{2}$; die Werthe $4\frac{1}{2}$, 3, $2\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 0... $d=-\frac{1}{2}$; A^3-a^3A; $A=\pm a\sqrt{a}$.

η.) $m+5=3$; $m=-2$; die Werthe 3, 0, -1; ... $d=-1$; $-a^3A+a^6=0$; $A=a^3$.

Jedem x gehören so viele Werthe von y zu, so viel y Abmessungen hat. Da nun jedes x in jede Reihe gesezt, nur einen Werth von y geben kann: so folgt schon hieraus, daß diese Methode so viel steigende, auch so viel fallende Reihen geben muß, so viel y Abmessungen hat. Im vorigen Beyspiel gibt es sechs Werthe von A für steigende Reihen; zwey aus α, δ; vier aus β, γ; wie auch sechs Werthe von A für fallende Reihen; zwey aus ε, η; vier aus ζ, θ. Jeder Werth von A bestimmt andere B, C; und gibt also eine andere Reihe.

IIItes Beyspiel.

Es sey die Gleichung:

$$y^4x-y^2x^3+yx^3-y^2+ax^2y-4xy-4x^2=0.$$

Für y substituire man Ax^m, so wird die Gleichung in folgende transformirt:

$$A^4x^{4m+1}-A^2x^{2m+3}+Ax^{m+3}-A^2x^{2m}+aAx^{m+2}+4Ax^{m+1}-4x^2$$

Die

Die Exponenten von x sind also auszutheilen:

*	m+3	2m+3	*	*
2	m+2	*	*	*
*	m+1	*	*	4m+1
*	*	2m	*	*

Der obere Umkreis dieses Schema wird also durch 2, m+3, 2m+3, 4m+1; und der untere durch 2, m+1, 2m, 4m+1 formirt.

Um nun

α.) fallende Reihen zu finden, muß man solche Paare von Gliedern gleich setzen, welche der obere Theil des Umkreises begreift; denn gerade Linien, die jedesmal durch solche Paare gezogen werden, lassen alle übrige Glieder unter sich. Es ist also:

1.) $4m+1=2m+3$; daher $m=1$.
2.) $2m+3=m+3$; daher $m=0$.
3.) $m+3=2$; daher $m=-1$.

β.) Um aufsteigende Reihen zu finden, sind solche Glieder einander gleich zu setzen, welche in die Seiten des unteren Theils des Umkreises fallen; denn durch was für in eine gerade Linie fallende Glieder man auch ein Lineal legt, so trifft solches die übrige nicht, es werde denn aufwärts bewegt. Es ist demnach

1.) $4m+1=2m$; daher $m=-\frac{1}{2}$.
2.) $2m=m+1=2$; daher $m=1$.

§. 297.

Dadurch, daß in einer Gleichung auch negative Exponenten vorkommen, wird in den bisherigen Schlüssen nichts geändert.

Denn negative Ausmessungen von x oder y können leicht weggeschafft werden, wenn man die ganze Funktion mit x oder y multiplicirt; dieses aber ist nicht unumgänglich nothwendig, denn man findet eben dieselbe Reihen, die Exponenten der veränderlichen Grössen mögen positiv oder negativ seyn. Denn in der Funktion von der Form $x^3 + 3x^2y^{-1} - 2x^{-1} - 16y^{-3} = 0$, hängt die eine veränderliche Grösse von der anderen nicht anders ab, als wenn diese nemliche Funktion mit x und y^3 multiplicirt, und also auf diese Form gebracht worden: $x^4 + 3x^3y^2 - 2y^3 - 16x = 0$. Die Gleichung des vorigen IIIten Beyspiels würde also vermittelst des Parallelogramms in die nemlichen Reihen aufgelöst, wenn sie durch Division mit x^2 und y in folgende transformirt wird:

$$y^3x^{-1} - yx + x - yx^{-2} + a + 4x^{-1} - 4y^{-1} = 0.$$

Setzet man $y = Ax^m$ so kommen die Exponenten von x also: $3m - 1$; $m + 1$; 1; $m - 2$; 0; -1; $-m$; die man in dem Parallelogramm also zu ordnen hat:

*	1	m+1	*	*
−m	0	*	*	*
*	−1	*	*	3m−1
*	*	m−2	*	*

Für aufsteigende Reihen kommt nun:

1.) $3m - 1 = m + 1$; daher $m = 1$

2.) $m + 1 = 1$; daher $m = 0$

3.) $1 = -m$; daher $m = -1$.

Für fallende Reihen kommt:

1.) $3m - 1 = m - 2$; daher $m = -\frac{1}{2}$

2.) $m - 2 = -1 = -m$; daher $m = 1$

Die

Die Werthe für m sind also eben dieselben, die wir oben fanden; auch wird eben das für A, B, C ꝛc. herauskommen.

§. 298.

Wenn unter den Exponenten Brüche vorkommen: so hat man zweyerley Auflösungsarten.

1.) Newton transformiret die Funktionen durch Substitution von neuen veränderlichen Grössen.

Z. B. Um die Gleichung $y^3 - xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{3}} = 0$ aufzulösen, sezt er $y^{\frac{1}{2}} = u$ und $x^{\frac{1}{3}} = z$; durch diese Substitution kommt die Gleichung $u^6 - z^3u + z^4 = 0$, nach deren Auflösung x und y wieder herzustellen sind. Da sich aber oft nur schwehr erkennen lässet, welche neue veränderliche Grössen einzubringen seyen; so ist es

2.) besser, mit Kästner die Exponenten von x, welche die durch die Annahme $y = Ax^m$ transformirte Gleichung enthält, auf einerley Benennung zu bringen, und sie für ganze Zahlen anzusehen, deren Einheit der gemeinschaftliche Nenner ist.

§. 299.

Wenn y durch eine endliche Reihe von x ausgedrückt werden kann, so wird sie durch die bisher erklärte Methode ebenfalls gefunden.

Es sey $(y - a + x^2 : b) \cdot (y^2 - xy + x^2) =$
$= y^2 + (x^2 + ax - x^3 : b)\, y - ax^2 +$
$+ x^4 : b = 0$

Die Exponenten stehen also:

4
* m+3
2 m+2 2m+2
* m+1 2m+1
* * 2m 3m

Setzet man hier $2m=3m$ oder $m=0$; so werden die Werthe der Exponenten 0; 1; 2; ..... und $d=1$; und $y=A+Bx+Cx^2+Dx^3$ .... Da findet man denn $A=a$; $B=0$; $C=-1:b$, und D mit allen folgenden Coefficienten $=0$, wie der erste Faktor erfordert. Will man versichert seyn, daß die Reihe solchergestalt abbrechen (abrumpi) soll; so ist nicht genug, daß etwan ein Coefficient von ihr $=0$ wird, wie hier schon mit B geschah; sondern man muß aus der Beschaffenheit der Gleichung sehen können, daß sich dieses mit allen folgenden Coefficienten ereignen muß. Man kann auch den gefundenen Werth statt y setzen, zu sehen, ob er der Gleichung völlig genug thut.

§. 300.

Wenn die Gleichung für A, oder für einen anderen Cofficienten unmögliche Werthe enthält, so zeigt dieses an, daß die gegebene Funktion unmögliche Werthe von y enthalte. Es kann aber A, oder B, C... aus zweyerley Ursachen unmögliche Werthe bekommen:

1.) Wenn es für einen jeden Werth von x einige unmögliche y gibt;

2.) wenn zwar nicht nothwendig jedem x unmögliche y zugehören; aber doch gewisse Bedingungen

gungen eine Reihe $y = Ax^m + Bx^{m+d}$ ꝛc. unmöglich machen.

Z. B. $y^2 + 2ay + x^2 = 0$. Hier sind die fallende Reihen für y möglich; Sucht man aber steigende Reihen für y, so werden, wofern sie sich nähern sollen, solche x erfordert, die beyde y unmöglich machen.

§. 301.

Newtonische Methode, Reihen einzuschreiben.

Newton schreibet die Gleichung selbst in die Fächer des Parallelogramms ein, und benennet die Fächer nach den Abmessungen der veränderlichen x und y. Die Hauptreihen sind:

1.) die verticale, welche die Exponenten von x enthält;

2.) die horizontale, welche die Exponenten von y enthält.

In das Fach o des Parallelogramms (§. 291.) kommt das ganz beständige Glied, wenn sich eines in der Gleichung befindet, in die Fächer m; 2m; kommen die Potenzen von y nach der Ordnung, und in die Fächer b; 2b ꝛc. die Potenzen von x, so viel als derselben vorhanden sind.

Es sey die Gleichung:

$$y^4x - y^2x^3 + yx^3 - y^2 + ax^2y + 4xy - 4x^2 = 0$$

sie wird also ausgetheilt:

		(E)	(D)	
		x^3y	$-y^2x^3$	* *
	*			
(A)	$-4x^2$	ax^2y	* *	*
*	$+4xy$	*	*	y^4x^2 (C)
*	*	$-y^2$	*	*
		(B)		

Man

Man sucht nun

1.) den Werth von y, wenn man den Werth von x als ziemlich merklich setzet; so lege man das Lineal an zwey oder mehrere, und zwar äusserste und höchste Glieder der Aequation, also daß alle übrige das Lineal nicht berührende Glieder unter dasselbe fallen: Also an diejenigen Glieder, welche der obere Theil des Umkreises AEDC enthält. Diese von dem Lineal getroffene Glieder setze man $= 0$; so werden aus diesen angenommenen Gleichungen die ersten Glieder der fallenden Reihen herausgebracht. Man sezt also hier

1.) $y^4x - y^2x^3 = 0$; daher kommt $y = \pm x$

2.) $x^3y - y^2x^2 = 0$; daher kommt $y = 1$

3.) $x^3y - 4x^2 = 0$; daher kommt $y = \frac{4}{x}$

Denn das Lineal, das an diese Paare von Gliedern angelegt wird, lässet alle übrige unter sich.

2.) Sucht man den Werth von y, und sezt den Werth von x klein; so legt man das Lineal an zwey oder mehrere äusserste und unterste Glieder, also, daß alle übrige über dasselbe fallen; also an diejenige Glieder, welche der untere Theil des Umkreises ABC trifft. Die Glieder, welche das Lineal also berühret, heisse man abermal o. Und auf solche Weise bringt man die erste Glieder aufsteigender Reihen heraus. Hier muß man setzen:

1.) $y^4x - y^2 = 0$; daher kommt $y = \pm\sqrt{\frac{1}{x}}$

2.) $4xy - y^2 - 4x^2 = 0$

$= y^2 - 4xy + 4x^2 =$

$= (y - 2x)^2$; daher kommt $y = 2x$.

Daß

Daß diese Methode, die ersten Glieder der Reihen aufzusuchen, untrüglich sey, erhellet daraus: Wenn man $Ax^m + Bx^{m+d}$ ꝛc. in die Stelle von y sezt, so gibt

I.) von den fallenden Reihen der Gleichung

die erste $A^4x^{4m+1} - A^2x^{2m+3} = 0$

die 2te $-A^2x^{2m+3} + Ax^{m+3} = 0$

die 3te $4Ax^{m+1} - A^2x^{2m} - 4x^2 = 0$

II.) von den aufsteigenden Reihen

die erste $A^4x^{4m+1} - A^2x^{2m} = 0$

die 2te $4Ax^{m+1} - A^2x^{2m} - 4x^2 = 0$

Aus diesen sämtlichen Gleichungen werden die Werthe von Ax^m gefunden: sezt man aber y wieder statt Ax^m, so kommt

1.) $A^4x^{4m+1} - A^2x^{2m+3} = y^4x - y^2x^3 = 0$

2.) $Ax^{m+3} - A^2x^{2m+3} = yx^3 - y^2x^3 = 0$

3.) $Ax^{m+3} - 4x^2 = yx^3 - 4x^2 = 0$

4.) $A^4x^{4m+1} - A^2x^{2m} = y^4x - y^2 = 0$

5.) $4Ax^{m+1} - A^2x^{2m} - 4x^2 =$

$= 4xy - y^2 - 4x^2 = 0$

Also sind die aus den angenommenen Gleichungen gefundene Werthe von $y = Ax^m$.

§. 302.

Noch eine andere neuere Art der Lage des Parallelogramms, die man gewöhnlich die Französische

nennet (welche aber keine beſondern Vortheile gewähret), hat Abt *de Gua* angegeben. S. Käſtner Anal. endl. Gr. §. 688.

*) Anmerk. Von weiterem Gebrauch des Parallelogramms S. *M. J. G. Pfeiffer*, Aequationum ſpecioſarum reſolutio per ſeries, ope Parallelogrammi Newtoniani. 4. Tub. 1765.

Der

Der fünfte Abschnitt.

Vermischte algebraische Rechnungen.

Das erste Kapitel.

Von den continuirlichen Brüchen, ihrer Bildung und Gebrauch.

§. 303.

Ein continuirlicher Bruch (Fractio Continua) wird genennet, dessen Nenner aus zwey Theilen bestehet, nemlich einer ganzen Zahl und einem Bruche; der Nenner dieses lezteren Bruches bestehet abermal aus einer ganzen Zahl und einem Bruche, und dieses so fort ohne Ende.

So ist z. B. $\frac{7}{30} = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}$ &c.

$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e+\cfrac{1}{f}}}}}$ &c. oder noch allgemeiner: $a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d+\cfrac{\delta}{e+\cfrac{\varepsilon}{f}}}}}$ &c.

Im

Im ersten Beyspiele sind alle Zähler der darinnen enthaltenen Brüche = 1 (und diese Art wollen wir vornemlich betrachten), in dem anderen aber sind diese Zähler Zahlen überhaupt.

§. 304.

Man verwandelt Einen Bruch in solche continuirliche Brüche durch fortgesetztes Dividiren.

Z. B. Es sey der Bruch $\frac{3347}{2241}$ zu verwandlen; so ist

$$\frac{3347}{2241} = 1 + \frac{1106}{2241}$$
$$\frac{2241}{1106} = 2 + \frac{29}{1106}$$
$$\frac{1106}{29} = 38 + \frac{4}{29}$$
$$\frac{29}{4} = 7 + \frac{1}{4}$$
$$\frac{4}{1} = 4$$

Es erhellet also, die ganze hier vorkommende Zahlen, die erste ausgenommen, seyen die Nenner des continuirlichen Bruches, die man für b, c, d ꝛc. zu substituiren hat. Alle Nenner sind ganze rationale Zahlen, und die Zähler eben so viele Einheiten. Man erhält demnach:

$$\frac{3347}{2241} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{38 + \cfrac{1}{7 + \frac{1}{4}}}}$$

*) Oder, es wäre der eigentliche Bruch $\frac{14}{75}$ also zu verwandlen, so muß man zuerst den Nenner durch den Zähler dividiren. So erhält man

$$\frac{14}{75} = \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{4}}}}$$

(denn $\frac{75}{14} = 5 + \frac{5}{14}$ daher man für 5 schreiben muß $\frac{1}{5}$.)

Wenn

Wenn demnach ein gewöhnlicher wahrer Bruch also zu verwandlen ist, so ist das erste Glied des continuirlichen Bruches allemal ein wahrer Bruch; hingegen jedesmal eine ganze Grösse, wenn ein uneigentlicher Bruch gegeben ist.

Wenn $\frac{a}{b}$ eine rationale Grösse ist, so wird sich die Auflösung in einen continuirlichen Bruch endlich schliessen müssen; denn man wird bey den auf einander folgenden Divisionen endlich auf eine Zahl kommen, die durch 1 dividirt werden müßte, wie in obigem Beyspiel. Ist aber $\frac{a}{b}$ irrational, so gehet die Operation ohne Ende fort, denn eine irrationale Grösse kann nicht anders, als durch eine unendliche Reihe rational ausgedrückt werden.

§. 305.

Aufgabe.

Den Werth der continuirlichen Brüche auf die gewöhnliche Art auszudrücken; oder einen continuirlichen Bruch auf einen gewöhnlichen zu reduciren.

Aufl. Man richte diese Brüche ein, also daß man anfänglich beym ersten, sodann bey dem zweyten, hierauf dem dritten ꝛc. Bruch abbricht. Also ist klar, daß

$$a = a$$

$$a+\frac{1}{b} = \frac{ab+1}{b}$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c}} = \frac{abc+a+c}{bc+1}$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d}}} = \frac{abcd+ab+ad+cd+1}{bcd+b+d}$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}}} = \frac{abcde+abe+ade+cde+abc+a+c+e}{bcde+be+de+bc+1}$$

*) Oder bey der anderen obigen allgemeinen Reihe; wenn zuerst die Brüche $a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c}}$ zu reduciren sind, so fängt man bey dem Bruch $\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c}}$ an, und erhält $\frac{\alpha c}{bc+\beta}$; demnach ist $a+\frac{\alpha c}{bc+\beta} = \frac{abc+\beta a+\alpha c}{bc+\beta}$. Sollen die ersten Glieder $a+\cfrac{\alpha}{b+\cfrac{\beta}{c+\cfrac{\gamma}{d}}}$ auf einen gewöhnlichen Bruch reducirt

ducirt werden, so ist zuerst $\frac{\beta}{c+\frac{\gamma}{d}} = \frac{\beta d}{cd+\gamma}$;

eben so ist $\frac{\alpha}{b+\frac{\beta d}{cd+\gamma}} = \frac{\alpha cd+\alpha\gamma}{bcd+b\gamma+\beta d}$

und a dazu addirt, $a+\frac{\alpha cd+\alpha\gamma}{bcd+\gamma b+\beta d} =$

$= \frac{abcd+\beta ad+\gamma ab+\alpha cd+\alpha\gamma}{bcd+\beta d+\gamma b}$

*) Es sey obiger continuirlicher Bruch

$$\cfrac{1+1}{2+\cfrac{1}{38+\cfrac{1}{7+\frac{1}{4}}}}$$

so ist zuerst $\frac{1}{7+\frac{1}{4}} = \frac{4}{29}$, ferner $\frac{1}{38+\frac{4}{29}} = \frac{1}{\frac{1106}{29}} = \frac{29}{1106}$, ferner $2+\frac{29}{1106} = \frac{2212}{1106}$ und hierzu 1 addirt, oder $1+\frac{1106}{2241} = \frac{3347}{2241}$ wie oben.

§. 306.

Einige Aufmerksamkeit zeiget, wie jeder dieser Brüche aus den vorhergehenden gemacht werden kann. Es ist nemlich ein jeder Zähler ein Aggregat aus dem lezten Zähler, nachdem man denselben mit einem neuen Buchstaben multiplicirt hat, und aus dem vorlezten Zähler, so wie er ist, genommen; und eben so

verhält es sich mit den Nennern. Schreibt man also die Buchstaben a, b, c, d, ꝛc. nach der Ordnung hin, so kann man daraus die gefundenen Brüche auf folgende Art formiren:

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & & e \\ \frac{1}{0}; & \frac{a}{1}; & \frac{ab+1}{b}; & \frac{abc+a+c}{bc+1}; & & \frac{abcd+ab+ad+cd+1}{bcd+b+d} \end{array}$$

Jeder Zähler wird hier gefunden, wenn man den unmittelbar vorhergehenden Zähler durch den darüber stehenden Anzeiger multiplicirt, und zu dem Produkt den darauf folgenden Zähler addirt. Eben dieses Gesez gilt auch für die Nenner. Der Bruch $\frac{1}{0}$ ist blos deswegen vorgesezt, daß man diese Regel vom Anfang an zum Grund legen könne; ob er gleich nicht aus dem continuirlichen Bruche entspringt, so macht er doch das Progressionsgesez deutlicher. Es stellet übrigens ein jeder Bruch den Werth des continuirlichen Bruchs bis zu dem Buchstaben, der über dem vor ihm hergehenden stehet, diesen aber mit eingeschlossen, dar.

Eben so läßt sich auch in der obigen anderen Formel jeder dieser Brüche aus den beyden vorhergehenden finden.

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & & e \\ \frac{1}{0}; & \frac{a}{1}; & \frac{ab+\alpha}{b}; & \frac{abc+\beta a+ac}{bc+\beta}; & & \frac{abcd+\beta ad+\alpha cd+\gamma ab+\alpha\gamma}{bcd+\beta d+\gamma b} \\ \omega & \beta & \gamma & \delta & & \varepsilon \end{array}$$

Man seßet nemlich in die Stelle des ersten Bruches $\frac{1}{0}$, und in die Stelle des zweyten $\frac{a}{1}$. Ist dieses geschehen, so findet man jeden der folgenden Brüche, wenn man den Zähler des lezten von den vorhergehenden

den Brüchen mit dem darüber stehenden, und den Zähler des vorlezten Bruches mit dem unten stehenden Anzeiger multipliciret, und beyde Produkte zusammen addiret; wo alsdann das Aggregat der Zähler des folgenden Bruches ist. Auf eine ähnliche Art ist der Nenner ein Aggregat aus dem lezten Nenner durch den darüber stehenden, und aus dem vorlezten Nenner durch den darunter stehenden Anzeiger multiplicirt. Ein jeder von den auf diese Art gefundenen Brüchen aber stellt den Werth des continuirlichen Bruchs bis zu dem Nenner, der über dem vorhergehenden Bruche steht, doch diesen mit eingeschlossen, dar.

§. 307.

Es sey ein continuirlicher Bruch:

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \text{ &c.}}}}$$

so werden die gemeinschaftliche Brüche, die man auch gleichgeltende (æquivalentes) zu nennen pfleget, folgende seyn:

$$\alpha, \frac{\alpha\beta+1}{\beta}, \frac{(\alpha\beta+1)\gamma+\alpha}{\beta\gamma+1}, \frac{[(\alpha\beta+1)\gamma+\alpha]\delta+\alpha\beta+1}{(\beta\gamma+1)\delta+\beta},$$
$$\frac{[(\alpha\beta+1)\gamma\delta+(\beta+\delta)\alpha+1]\varepsilon+(\beta+1)\alpha+\gamma}{[(\beta\gamma+1)\delta+\beta]\varepsilon+\beta\gamma+1} \text{ &c.}$$

demnach sind des continuirlichen Bruches $\frac{3}{2}\frac{3}{2}\frac{4}{4}\frac{7}{1}$ seine gleichgeltende Brüche, wenn die unteren Zeiger $=1, 1, 1, 1, 1$, sind, und die oberen $=1, 2, 38, 7, 4$; folgende:

$$1, \frac{3}{2}, \frac{115}{77}, \frac{808}{541}, \frac{3341}{2241}.$$

Man hat demnach, um den wahren Werth des Bruches zu erhalten, den lezten gleichgeltenden Bruch zu nehmen, denn immer wird die Annäherung genauer, und ist also in den vorhergehenden Brüchen geringer.

Z. B. In obiger Reihe ist offenbar der erste Bruch $\frac{1}{0}$ grösser als x; der zweyte $\frac{a}{1}$ hingegen ist kleiner als x; der dritte $a+\frac{a}{b}$ ist wieder grösser, der vierte wieder kleiner, und so sind diese Brüche auch ferner wechselsweise grösser und kleiner als x. Immer aber kommt der folgende Bruch dem wahren Werthe von x näher, als jeder der vorhergehenden, und man erhält daher auf diese Weise den Werth von x näherungsweise sehr schnell und mit vieler Bequemlichkeit. Und dieses findet auch alsdann noch Statt, wann der continuirliche Bruch ohne Ende fortgehet, woferne nur die Zähler α, β, γ, δ ꝛc. nicht zu sehr wachsen. Wenn alle diese Zähler lauter Einheiten sind, so ist diese Näherung gar keiner Unbequemlichkeit unterworfen.

§. 308.

Lambert trägt in seiner Abhandl. von Verwandlung der Brüche (Beytr. zum Gebr. der Mathem. II. Theil I. Abschn. n. 3.) die Lehre von den continuirlichen Brüchen auf folgendem Weg vor.

Man habe z. B. $\frac{216}{1147}$, so theilt man erstlich Zähler und Nenner durch 216, und dieses gibt

$$\frac{216}{1147} = \frac{1}{5+\frac{67}{216}}$$

auf

auf eine ähnliche Art erhält man

$$\frac{67}{216} = \frac{1}{3+\frac{15}{67}} = \frac{1}{3+a}$$

$$a = \frac{15}{67} = \frac{1}{4+\frac{7}{15}} = \frac{1}{4+b}$$

$$b = \frac{7}{15} = \frac{1}{2+\frac{1}{7}} = \frac{1}{2+c}$$

Da man nun nach dieser vierten Theilung auf $\frac{1}{7}$ verfällt, wo sich die Division nicht weiter fortsetzen lässet, so ist man mit der Auflösung des Bruches fertig, und erhält nach geschehener Substitution:

$$\frac{216}{1147} = \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\frac{1}{7}}}}}$$

Dieses will so viel sagen, der Bruch $\frac{216}{1147}$ sey etwas kleiner, als $\frac{1}{5}$, etwas weniges grösser als

$$\frac{1}{5\frac{1}{3}} = \frac{3}{16}$$

etwas noch wenigeres kleiner, als

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{5+\frac{4}{13}} = \frac{13}{69}$$

etwas noch wenigeres grösser, als

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\frac{1}{2}}}} = \frac{1}{5+\frac{2}{9}} = \frac{29}{154}$$

und genau gleich $\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\frac{1}{7}}}}}$

*) Man mache die Probe, und setze zuerst

$$\frac{216}{1147} = \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+a}}$$

wobey $a = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\frac{1}{7}}}$

ist: multiplicirt man nun Zähler und Nenner mit $3+a$, so erhält man

$$\frac{216}{1147} = \frac{3+a}{16+5a}$$

Ferner setze man $a = \cfrac{1}{4+b}$

wobey folglich $b = \cfrac{1}{2+\frac{1}{7}}$ ist, so erhält man

$$\frac{216}{1147} = 3+\cfrac{1}{\cfrac{4+b}{16+\cfrac{5}{4+b}}}$$

und folglich, wenn Nenner und Zähler mit $4+b$ multiplicirt wird,

$$\frac{216}{1147} = \frac{13+3b}{69+16b}$$

Sezt

Sezt man wiederum $b = \frac{1}{2+c}$ so ist $c = \frac{1}{7}$ und man erhält

$$\frac{216}{1147} = 13 + \frac{3}{2+c} \qquad \frac{29+13c}{154+69c}$$
$$69 + \frac{16}{2+c}$$

Endlich, da $c = \frac{1}{7}$ ist, so wird

$$\frac{216}{1147} = \frac{29+\frac{13}{7}}{154+\frac{69}{7}} = \frac{216}{1147}$$

wo sich der fürgegebene Bruch wieder darstellet.

Dieses Verfahren zeiget nun, wie die Brüche $\frac{1}{5}, \frac{3}{16}, \frac{13}{69}, \frac{29}{154}$ aus den Divisoren 5, 3, 4, 2, 7 entspringen. Denn so ist:

$1.3 = 3$	und	$5.3+1 = 16$
$3.4+1 = 13$		$16.4+3 = 69$
$13.2+3 = 29$		$69.2+16 = 154$
$29.7+13 = 216$		$154.7+69 = 1147$

Man darf nemlich in den gefundenen Brüchen

$$\frac{3+a}{16+5a}, \frac{13+3b}{69+16b}, \frac{29+13c}{154+69c}$$

nur $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{7}$ sezen, um die absoluten Zahlen des folgenden Bruchs zu erhalten. Denn so ist

$$\frac{3+\frac{1}{4}}{16+\frac{5}{4}} = \frac{13}{69}, \text{ und } \frac{13+\frac{2}{3}}{69+\frac{16}{2}} = \frac{29}{154}$$

$$\text{und } \frac{29+\frac{13}{7}}{154+\frac{69}{7}} = \frac{216}{1147}$$

§. 309.

Will man nun die ganze Rechnung in ihre einfachste Ordnung bringen, so läßt sie sich folgender Gestalt vorstellen:

1.) Erstlich dividirt man jeden Divisor durch seinen Ueberrest:

| | | |

5.	0	+ 1 =	1	und	5.	1	+ 0 = 5
3.	1	+ 0 =	3		3.	5	+ 1 = 16
4.	3	+ 1 =	13		4.	16	+ 5 = 69
2.	13	+ 3 =	29		2.	69	+ 16 = 154
7.	29	+ 13 =	216		7.	154	+ 69 = 1147

macht, d. i. jede Zahl der dritten und vierten Columne mit dem nebenstehenden Quotienten der zweyten Columne multiplicirt, und zu dem Produkte die nächst über derselben stehende Zahl addirt. Nun geben die Zahlen der beyden lezten Columnen die Brüche $\frac{1}{0}, \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{3}{16}, \frac{13}{69}, \frac{29}{154}, \frac{216}{1147}$, welche wechselsweise grösser oder kleiner sind, als der lezte, wovon aber je der folgende weniger verschieden ist.

§. 310.

Nun fragt sich aber auch, wie die Genauigkeit eines jeden solcher Brüche insbesondere zu bestimmen sey? Die natürlichste Probe, die sich hierüber anstellen lässet, ist, nach der gewöhnlichen Art diese Brüche zu subtrahiren. So findet man

$$\frac{1}{5} - \frac{216}{1147} = \frac{1147 - 1080}{5.1147} = \frac{67}{5.1147}$$

$$\frac{216}{1147} - \frac{3}{16} = \frac{15}{16.1147}$$

$$\frac{13}{69} - \frac{216}{1147} = \frac{7}{69.1147}$$

$$\frac{216}{1147} - \frac{29}{154} = \frac{1}{154.1147}$$

Und hieraus siehet man, daß die Zähler dieser Brüche 67, 15, 7, 1, der Ordnung nach die Ueberreste der ersten Columne, die Nenner aber das Produkt aus dem Nenner eines jeden Bruchs und dem

Nen-

Nenner 1147 des fürgegebenen Bruches sind. Auf diese Art wird demnach der fürgegebene Bruch in zwey aufgelöst, und es ist

$$\frac{216}{1147} = \frac{1}{5} - \frac{67}{5.1147} = \frac{3}{16} + \frac{15}{16.1147} =$$

$$= \frac{13}{69} - \frac{7}{69.1147} = \frac{29}{154} + \frac{1}{154.1147} =$$

$$= \frac{216}{1147}$$

*) Wenn man die Brüche umkehrt,

$$\frac{1}{5}, \frac{3}{16}, \frac{13}{69}, \frac{29}{154}, \frac{216}{1147}$$

und statt derselben

$$\frac{5}{1}, \frac{16}{3}, \frac{69}{13}, \frac{154}{29}, \frac{1147}{216}$$

nimmt, so findet man auf eine ganz ähnliche Art:

$$\frac{1147}{216} = \frac{5}{1} + \frac{67}{1.216} = \frac{16}{3} - \frac{15}{3.216} =$$

$$= \frac{69}{13} + \frac{7}{13.216} = \frac{154}{29} - \frac{1}{29.216} =$$

$$= \frac{1147}{216}$$

Wo ebenfalls die Ueberreste 67, 15, 7, 1 als Zähler erscheinen.

§. 311.

Weitere Beyspiele.

Es seyen die Brüche

$$\frac{61}{97} \text{ und } \frac{231}{57}$$

97		1	0
61	1	0	1
36	1	1	1
25	1	1	2
11	2	2	3
3	3	5	8
2	1	17	27
1	2	22	35
		61	97

257		1	0
231	1	0	1
26	8	1	1
23	1	8	9
3	7	9	10
2	1	71	79
1	2	80	89
		231	257

und folglich für das erste Beyspiel

$$\frac{61}{97} = \frac{1}{1} - \frac{36}{1.97} = \frac{1}{2} + \frac{25}{2.97} = \frac{2}{3} - \frac{11}{3.97} =$$
$$= \frac{5}{8} + \frac{3}{8.97} = \frac{17}{27} - \frac{2}{27.97} = \frac{22}{35} + \frac{1}{35.97} =$$
$$= \frac{61}{97}$$

oder umgekehrt

$$\frac{97}{61} = \frac{1}{1} + \frac{36}{1.61} = \frac{2}{1} - \frac{25}{1.61} = \frac{3}{2} + \frac{11}{2.61} = \frac{8}{5} -$$
$$- \frac{3}{5.61} = \frac{27}{17} + \frac{2}{17.61} = \frac{35}{22} - \frac{1}{22.61} = \frac{97}{61}$$

Für das andere Beyspiel

$$\frac{231}{257} = \frac{1}{1} - \frac{26}{1.257} = \frac{8}{9} + \frac{23}{9.257} = \frac{9}{10} -$$
$$- \frac{3}{10.257} = \frac{71}{79} + \frac{2}{79.257} = \frac{80}{89} - \frac{1}{89.257} =$$
$$= \frac{231}{257}$$

oder umgekehrt

$$\frac{257}{231} = \frac{1}{1} + \frac{26}{1.231} = \frac{9}{8} - \frac{23}{8.231} = \frac{10}{9} + \frac{3}{9.231} =$$
$$= \frac{79}{71} - \frac{2}{71.231} = \frac{89}{80} + \frac{1}{80.231} = \frac{257}{231}.$$

§. 312.

Wenn ein Bruch sich in der That durch kleinere Zahlen ausdrücken lässet, so findet man nach diesem Verfahren nicht nur den verkleinerten Bruch genau, sondern auch noch alle noch kleinere, die von demselben am wenigsten verschieden sind.

Z. B.

z. B. Es sey $\frac{189}{301}$, so ist

301	1	0
189	1 —	0 1
112	1 —	1 1
77	1 —	1 2
35	2 —	2 3
7	5 —	5 8
	27	43

Demnach ist

$$\frac{189}{301} = \frac{27}{43} = \frac{1}{2} + \frac{77}{2.301} = \frac{2}{3} - \frac{35}{3.301} = \frac{5}{8} + \frac{7}{8.301}$$

oder $\frac{1}{2} + \frac{11}{2.43} = \frac{2}{3} - \frac{5}{3.43} = \frac{5}{8} + \frac{1}{8.43}$.

§. 313.

Aufgaben.

*) Man soll das Verhältnis der Seite eines Quadrats zu der Diagonale desselben durch Brüche ausdrücken, welche dasselbe sehr genau oder beynahe ganz richtig angeben.

Aufl. Man weißt, daß wenn die Seite = 1 ist, die Diagonale =

$= \sqrt{2} = 1{,}41421355530202722 \ldots$ ist. Wir wollen uns hier mit den 7 ersten Decimalzahlen 1,4142135 begnügen, und den Ueberrest = a setzen; so ist

1,4142135 + a	1	0
1,0000000	1— 0	1
4142135 + a	2— 1	1
1715730 — 2a	2— 2	3
710675 + 5a	2— 5	7
294380 — 12a	2— 12	17
121915 + 29a	2— 29	41
50550 — 70a	2— 70	99
20815 + 169a	2—169	239
8920 — 408a	2—408	577
2975 + 985a	2—985	1393
2970 — 2378a		

Man siehet hieraus, daß der vom Ueberreste a herrührende Unterschied anfangt, beträchtlich groß zu werden, und daß man folglich, ohne mehrere Ziffern mitzunehmen, die Division nicht weiter fortsetzen müsse. Da nun

$\frac{1}{1}\frac{7}{2} = 1,4166...$
$\frac{4}{2}\frac{1}{9} = 1,41379...$
$\frac{9}{7}\frac{9}{0} = 1,41428....$
$\frac{2}{1}\frac{3}{6}\frac{9}{9} = 1,414207...$
$\frac{5}{4}\frac{7}{0}\frac{7}{8} = 1,414215$
$\frac{1}{9}\frac{3}{8}\frac{9}{5}\frac{3}{} = 1,4142132$

ist, so siehet man, daß wenn man bey den 7 angenommenen Decimalziffern bleiben will, der lezte Bruch eben so weit reicht, und daher auch aus diesem Grunde das fernere Dividiren überflüßig wird.

*) Der Mond durchlauft den Thierkreis in 27 T. 7 St. 43 M. 5″, 2‴, $58\frac{1}{2}^{IV}$, dies gibt in Decimaltheilen 27,321 58601 Tage: man soll finden, wie sich diese Zahl zu ganzen Tagen verhalte?

$27,32158601 + a$	$+ 1$	0
1,00000000	27 — 0	1
$32158601 + a$	3 — 1	27
$3524197 - 3a$	9 — 3	82
$4408208 + 28a$	7 — 28	765
$438401 - 199a$	1 — 199	5437
$12427 + 227a$	35 — 227	6202
3456		

Weiter ist nun die Division nicht fortzusetzen, weil sich der von a herrührende Unterschied zu sehr anhäufen, und die Quotienten unrichtig machen würde. Nehmen wir demnach den lezten Bruch $\frac{6202}{227}$, so will dieser so viel sagen, daß in 6202 Tagen der Mond 227mal den Thierkreis durchlauffe, und dieses ist nun sehr genau, denn $\frac{6202}{227}$ wirklich dividirt, gibt 27 T. 7 St. 43 M. 5″ 1‴ 19⁗, so von der wahren Zeit kaum um $1\frac{2}{3}$ Tertien verschieden ist, folglich für die 6202 Tage kaum $6\frac{1}{3}$ Sekunden Unterschied gibt. Hingegen gibt der Bruch $\frac{765}{28}$ die Zeit von 27 T. 7 St. 42 M. $51\frac{1}{2}$ Sec. welche um $13\frac{3}{5}$ Sec. zu klein ist. Unerachtet nun dieser Unterschied beträchtlicher ist, als der vorhergehende, so ist er doch für einen Uhrmacher, der den Mondlauf durch ein Räderwerk vorstellen wollte, unerheblich genug, um so mehr, da der Bruch $\frac{765}{28}$, welcher $= \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17}{4\ 7}$ ist, durch diese schickliche Zerfällung der Zahlen zu der Eintheilung der Räder sehr bequem ist, und weil man die Uhr erst nach etwan 5 Umlaufszeiten des Mondes um 1 Minute zu verrücken hat. Man siehet also hier ein neues Beyspiel, wie vortheilhaft es ist, mehrere beynahe gleichgeltende Brüche in der Wahl zu haben.

*) Man soll das Verhältnis des Diameters zur Peripherie durch so kleine Zahlen ausdrücken, daß solches

ches auf keine genauere Art geschehen kann, wenn man nicht grössere Zahlen nimmt.

Aufl. Wenn man den bekannten Decimalbruch

3,1415926535 ꝛc.

auf die beschriebene Art durch eine fortgesezte Division entwickelt, so erhält man die Quotienten

3, 7, 15, 1, 292, 1, 1 ꝛc.

und daraus ergeben sich, nach der oben gleich anfangs vorgetragenen Methode, folgende Brüche:

$\frac{1}{0}, \frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}$ ꝛc.

Der zweyte zeigt schon an, daß sich der Diameter zur Peripherie wie 1 : 3 verhalte, und genauer kann dies Verhältnis durch keine andere als durch grössere Zahlen ausgedrückt werden. Der dritte Bruch gibt das Archimedeische Verhältnis 7 : 22; und der fünfte das vom Metius, nemlich 113 : 355, welches der Wahrheit schon so nahe kommt, daß der Fehler weniger als $\frac{1}{113.33102}$ beträgt. Uebrigens sind diese Brüche wechselsweise zu groß und zu klein.

†.) Man löse nun aber auch $\frac{355}{113}$ auf: so wird erstlich

$$\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{133}$$

sodann, weil $\frac{16}{133}$ dem $\frac{1}{7}$ am nächsten kommt,

$$\frac{16}{113} - \frac{1}{7} = -\frac{1}{791} = \frac{1}{7.113}$$

Da nun der Ueberrest $\frac{1}{791}$ schon 1 zum Zähler hat, so gebraucht es keiner weiteren Auflösung, und es ist ganz kurz

$$\frac{355}{113} = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{7.113}.$$

*) Man soll das Verhältnis eines Tages zum mittleren Sonnenjahre in den möglich kleinsten Zahlen ausdrücken.

Aufl. Da das Sonnenjahr 365 T. 5 St. 48′ 55″ enthält, so besteht es aus $365\frac{20935}{86400}$ Tagen. Entwickelt man nun diesen Bruch, als worauf es allein ankommt, so findet man die Quotienten

4, 7, 1, 6, 1, 2, 2, 4

und aus ihnen folgende Brüche:

$\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{8}{33}, \frac{55}{227}, \frac{63}{260}, \frac{181}{747}$ &c.

Die Stunden, Minuten und Sekunden, welche das Jahr über 365 Tage enthält, machen also in 4 Jahren ungefähr einen Tag (worauf sich auch die Einrichtung des Julianischen Kalenders gründet), genauer in 29 Jahren 7 Tag, noch genauer entstehen daraus in 33 Jahren 8 Tage, oder in 747 Jahren 181 Tage; so daß also in 400 Jahren 97 Tage zu viel heraus kommen: Da also der Julianische Kalender in diesem Zeitraume 100 Tage einschaltet, so verwandelt der Gregorianische in 400 Jahren 3 Schaltjahre in gemeine Jahre.

§. 314.

Es lassen sich die continuirlichen Brüche auch zur Ausziehung der Quadratwurzel anwenden.

Es sey der Bruch $1 : \sqrt{(A^2+B^2)}$ und man dividire wirklich, so kommt

$$\sqrt{(A^2+B^2)} \text{ in } \cfrac{1}{A+\cfrac{1}{2A:B^2+\cfrac{1}{2A+\cfrac{1}{2A:B^2+\text{&c.}}}}}$$

folgs

folglich die Wurzel

$$\sqrt{(A^2+B^2)} = A + \cfrac{1}{2A : B^2 + \cfrac{1}{2A + \cfrac{1}{2A : B^2 + \text{&c.}}}}$$

*) Man kann aber auch diese Formel unmittelbar folgendergestalt finden: Man setze

$\sqrt{(A^2+B^2)} = A+y$, so ist

$$A^2+B^2 = A^2+2Ay+y^2$$

folgl. $y(y+2A) = B^2$

und also $y = \cfrac{B^2}{2A+y}$.

Nun kann man für y, so in dem Nenner des Bruchs ist, den Bruch selbst wieder setzen, so hat man

$$y = \cfrac{B^2}{2A+\cfrac{B^2}{2A+y}}$$

fährt man auf gleiche Art fort, so wird

$$y = \cfrac{B^2}{2A+\cfrac{B^2}{2A+\cfrac{B^2}{2A+\text{&c.}}}}$$

und hiebey darf man nur jeden Bruch durch B^2 dividiren, um sodann die vorige Formel

$$y+A = \sqrt{(A^2+B^2)} = A + \cfrac{1}{2A : B^2 + \cfrac{1}{2A+1 \over 2A : B^2 + \text{&c.}}}$$

wieder zu erhalten,

Es sey nun die Quadratwurzel aus 38 zu ziehen; so sezt man $38 = 36 + 2$; demnach $36 = A^2$; $2 = B^2$; $A = 6$; $2A : B^2 = 6$; so erhält man

$$\sqrt{38} = 6 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{12 + \text{ꝛc.}}}}}}$$

dieses gibt nun folgende Figur:

	1	0
6 —	0	1
12 —	1	6
6 —	12	73
12 —	73	444
6 —	888	5401
ꝛc.	5401	32850

und demnach ist $\sqrt{38} < 1\frac{1}{6}$

$> 1\frac{12}{73}$

$< 1\frac{73}{444}$ ꝛc.

*) Man kann sich aber auch der ersten Formel

$$\sqrt{(A^2 + B^2)} = A + \cfrac{B^2}{2A + \cfrac{B^2}{2A + \cfrac{B^2}{2A \text{ ꝛc.}}}}$$

bedienen, und die Quadratwurzel durch eine Reihe von Regeln DeTri finden, welche man so lange fortsetzen kann, als man es der Genauigkeit wegen nöthig erachtet. Und dieses findet statt, so oft die vorgegebene Zahl eine Summe von zwey Quadratzahlen ist, von welchen

chen man die Wurzeln hat. Denn da sezt man der Ordnung nach

$$2A : B = B : a$$
$$(2A+a) : B = B : b$$
$$(2A+b) : B = B : c$$

Und die Zahlen $A+a$, $A+b$, $A+c$ ꝛc. werden der wahren Wurzel desto näher kommen, je weiter man diese Analogien fortgesezt hat, und je grösser A als B ist.

§. 315.

Wir hatten schon oben (§. 313.) ein Beyspiel, wie die continuirlichen Brüche einen sehr bequemen Weg an die Hand geben, sich dem Werthe $\sqrt{2}$ zu nähern: allein dergleichen läßt sich auch daraus für die Wurzeln anderer Zahlen herleiten. Es sey demnach

$$x = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{a+\text{ꝛc.}}}}}}$$

wo also $x = \frac{1}{a+x}$, und $x^2+ax=1$, und also $x^2 = -\frac{1}{2}a + \sqrt{(1+\frac{1}{4}a^2)} = \sqrt{\frac{(a^2+4)}{2}} - \frac{a}{2}$ wird.

Es dienet daher dieser Bruch zur Erfindung der Quadratwurzeln aus den Zahlen, die unter die Form a^2+4 gehören. Sezt man also für a nach und nach die Zahlen 1, 2, 3, 4. ꝛc. so findet man $\sqrt{5}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{13}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{29}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{53}$ ꝛc. wenn man

nem

nemlich diese Wurzeln auf ihre einfachste Form zurückführet. Es ist folglich

1, 1, 1, 1, 1, 1,

$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}$ &c. $= \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

2, 2, 2, 2, 2, 2,

$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \frac{12}{29}, \frac{29}{70}$ &c. $= \sqrt{2}-1$

3, 3, 3, 3, 3, 3

$\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{10}, \frac{10}{33}, \frac{33}{109}, \frac{109}{360}$ &c. $= \sqrt{\frac{13}{2}}-\frac{3}{2}$

4, 4, 4, 4, 4, 4

$\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{4}{17}, \frac{17}{72}, \frac{72}{305}, \frac{305}{1292}$ &c. $= \sqrt{5}-2$

Hiebey ist zu merken, daß die Näherung desto schneller erfolgt, je grösser a ist. So ist in dem lezten Fall $\sqrt{5} = 2\frac{305}{1292}$, wobey der Irrthum geringer ist als $\frac{1}{1292 \cdot 5473}$; es ist aber 5473 der Nenner des folgenden Bruchs $\frac{1292}{5473}$.

§. 316.

Auf diese Art aber können blos die Wurzeln solcher Zahlen gefunden werden, die Summen zweyer Quadrate sind. Um daher dieses Näherungsmittel auch auf andere Zahlen auszudehnen, so sey

$$x = \cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{a+\text{ &c.}}}}}}$$

als:

alsdann wird

$$x = \frac{1}{\frac{a+1}{b+x}} = \frac{b+x}{ab+1+ax}$$

und folgl. $ax^2 + abx = b$, und

$$x = -\tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2 + \frac{b}{a})} = \frac{-ab+\sqrt{(a^2b^2+4ab)}}{2a}$$

Vermittelst dieser Formel lassen sich die Quadratwurzeln aller Zahlen finden. Sezt man z. B. $a=2$; $b=7$; so wird

$$x = \frac{-14+\sqrt{14.18}}{4} = \frac{-7+3\sqrt{7}}{2};$$

und diesen Werth von x erhält man in den Brüchen:

$$2, \quad 7, \quad 2, \quad 7, \quad 2, \quad 7,$$
$$\frac{0}{1}, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{7}{15}, \quad \frac{15}{32}, \quad \frac{112}{239}, \quad \frac{239}{510} \text{ ꝛc.}$$

Es ist daher beynahe $\frac{-7+3\sqrt{7}}{2} = \frac{239}{510}$, und $\sqrt{7} = \frac{2024}{765} = 2{,}6457516$. Dieser Werth weichet von dem wahren 2,64575131 noch nicht um $\frac{3}{10000000}$ ab.

§. 317.

Von den continuirlichen Brüchen sind auch die Abhandlungen nachzusehen, de Fractionibus continuis; de fractionibus continuis observationes; und de formatione fractionum continuarum, welche Euler in die Sammlungen der Petersburgischen Akademie der Wissenschaften von den Jahren 1744, 1750, 1775 und 1779 eingerückt hat.

Das zweyte Kapitel.

Von den Interpolationsmethoden.

§. 318.

Es seyen zwey Reihen von Grössen:

m, n, p, q, r, s

α, β, γ, δ, ε, ζ

also, daß einem jeden Gliede der oberen Reihe ein gewisses Glied der unteren Reihe zukomme, das nach einem gewissen Gesetz aus der oberen hergeleitet ist.

Die Glieder der oberen Reihe nenne man Wurzeln, die Glieder der unteren aber nenne man Functionen der correspondirenden oberen Glieder.

Hier kann eine doppelte Aufgabe vorkommen:

1.) wenn irgend eine andere Wurzel gegeben wird, z. B. x; was wird ihre Function seyn?

2.) wenn irgend eine Function gegeben wird, z. B. y; was wird ihr für eine Wurzel zugehören?

Und nun wird jede dieser Aufgaben durch die Interpolationsmethode aufgelöst.

Z. B. Man setze von x folgende Werthe, welche zugleich die Anzahl der Glieder anzeigen; 1, 2, 3, 4. ꝛc. von y aber folgende, welche in einer arithmetischen Reihe fortgehen: 4, 7, 10, 13 ꝛc. so kann man fragen, was für ein Werth von y gehört zu dem Werth $8\frac{2}{3}$ von x? Hier müßte man nun noch die fehlenden Glieder der arithmetischen Reihe ergänzen, sie ein-

einschalten d. i. interpoliren. Eben so leicht würde die Interpolation seyn, wenn y die Glieder einer geometrischen Reihe bedeutete. Von beyden Fällen haben wir oben Beyspiele gegeben, §. 244. und 276.

Allein sehr oft hat man zwar für y eine Reihe von Werthen α, β, γ... die einer gegebenen Reihe m, n, p... von Werthen für x zugehöret; allein es fehlet an einer algebraischen Gleichung, durch deren Hülfe man auch diejenigen Werthe von y finden kann, die denen von x zugehören, welche zwischen m, n, p... fallen. Und da bedienet man sich dann zu Erfindung der zwischen die α, β, γ... fallenden Werthe von y besonderer Einschaltungs- oder Interpolationsformeln, vermittelst deren man eine solche Gleichung zwischen x und y anzugeben in den Stand gesezt wird, die der Wahrheit ziemlich nahe $y=\alpha$ oder $y=\beta$ oder $y=\gamma$ ꝛc. gibt, nachdem man darinnen $x=m$, oder $x=n$, oder $x=p$ sezt: da sich dann dadurch aus jedem zwischen m, n, p... liegenden Werth von x auch ziemlich genau (wenn nemlich m, n, p... selbst nicht zu sehr von einander abweichen) der zwischen α, β, γ... liegende von y ergibt.

§. 319.

Es ist gewissermassen willkührlich, was für eine Reihe von x man für die Bestimmung des Werthes von y annehmen will, wenn man nur die Coefficienten dieser Reihe so zu bestimmen weißt, daß die Formel, wenn in ihr die gegebenen Werthe m, n... von x substituirt werden, alsdann die zugehörigen

gleichfalls schon bekannten Werthe von y gibt. Man kann daher überhaupt folgende 3 Formeln annehmen:

$$\left.\begin{array}{l} 1.)\ y = ax + bx^2 + cx^3 \ldots. \\ 2.)\ y = ax + bx^3 + cx^4 \ldots. \\ 3.)\ y = ax^2 + bx^4 + cx^6 \ldots. \end{array}\right\} \text{b}$$

Soll nun in diesen Formeln

$$\begin{array}{lll} \text{für } x = m & y = \alpha \\ = n & = \beta \\ = p & = \gamma \\ = q & = \delta \end{array}$$

werden; so erhellet, daß man den Gliedern dieser Formeln eine solche Gestalt geben müsse, bey der jedesmal die Reihe für y von selbst gehörig abbricht, nachdem der Werth von x beschaffen ist, dem das y zugehört. Es ist daher am bequemsten, in die Glieder von obigen drey Gleichungen die Grössen $x - m$, $x - n$, $x - p$ ꝛc. selbst als Faktoren hineinzubringen, damit alsdann jedesmal die Reihe für y (z. B. für $y = \beta$) mit dem Gliede abbricht, das zuerst $x - n$ enthält, wo n dem β zugehört. Man wird daher leicht auf die Gedanken kommen, die obigen Formeln so auszudrücken:

$$\left.\begin{array}{l} 1.)\ y = Ax + Bx.(x-m) + Cx.(x-m)(x-n) + \ldots. \\ 2.)\ y = Ax + Bx.(x^2 - m^2) + Cx.(x^2-m^2)(x^2-n^2 + \ldots. \\ 3.)\ y = Ax^2 + Bx^2(x^2 - m^2) + Cx^2.(x^2-m^2)(x^2-n^2) + \ldots. \end{array}\right\} \text{a}$$

Die Aehnlichkeit mit der Binomialformel könnte indessen den Gedanken veranlassen, die drey erwähnten Formeln lieber so einzurichten:

1.) y=

$$1.)\ y = Ax + Bx.\frac{x-m}{m} + Cx.\frac{(x-m).(x-n)}{m.n} + \text{ꝛc.}$$

$$2.)\ y = Ax + Bx.\frac{x^2-m^2}{m^2} + Cx.(x^2-m^2).\frac{(x^2-n^2)}{m^2.n^2} + \text{ꝛc.}$$

$$3.)\ y = Ax^2 + Bx^2.\frac{x^2-m^2}{m^2} + Cx^2\frac{(x^2-m^2).(x^2-n^2)}{m^2.n^2} + \text{ꝛc.}$$

} ♀

wo die erste Formel, wenn m, n, p... die Zahlen 1, 2, 3.... vorstellen, so aussiehet:

$$y = Ax + B.\frac{x(x-1)}{1} + C.x.\frac{(x-1).(x-2)}{1.2} + D.x.\frac{(x-1).(x-2).(x-3)}{1.2.3} + \text{ꝛc.}$$

§. 320.

De la Caille behält die Reihen ♄ bey: *Walmesley* in den Memoires de l'Acad. de Berl. 1758, und *Walz* in den Actis Eruditorum bedienen sich der Formeln ♃. Lambert in s. Anmerkungen über das Einschalten, (Beytr. zum Gebr. der Mathemat. 3ter Theil) behält die Formeln ♀ als die bequemsten bey, von welchen Langsdorf, (Erläuter. über die Kästn. Analys. des Unendl.) eine weitere Ausführung gegeben; welche wir hier einrücken, sodann aber auch die ersteren Formeln ♄ des de la Caille in ihrer Anwendung betrachten wollen.

§. 321.

§. 321.

Erläuterung der Interpolationsformeln ♀.

Es kommt darauf an, die Coefficienten A, B, C ꝛc. so zu bestimmen, daß y die Werthe $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ für $x = m$, $x = n$, $x = p \ldots$ erhält. Daher ist für jede der drey Formeln eine besondere Rechnung nöthig.

Erste Formel.

Soll in dieser ersten Formel $y = \alpha$ für $x = m$ werden, so hat man, diesen Werth von y und x substituirt,

$$\alpha = A.m + o + o + o \ldots.$$ Also

$$A = \alpha : m$$

Ist $y = \beta$ für $x = n$, so wird

$$\beta = An + B.n\left(\frac{n-m}{m}\right) + o + o \ldots.$$ Also

$$B = \frac{(\beta - An).m}{n.(n-m)}$$

$$= \left(\frac{\beta}{n} - A\right).\frac{m}{n-m}$$

Um nun ferner $y = \gamma$ für $x = p$ zu erhalten, hat man

$$\gamma = Ap + B.\frac{p(p-m)}{m} +$$

$$+ C.\frac{p.(p-m)(p-n)}{m.n} + o \ldots.$$

wo nemlich jedes der folgenden Glieder allemal o zum Faktor hat. Das gibt nun

C =

$$C = (\gamma - Ap - B.\frac{p(p-m)}{m}) \frac{mn}{p.(p-m)(p-n)}$$

$$= (\frac{\gamma}{p} - A - \frac{B.(p-m)}{m}). \frac{mn}{(p-m)(p-n)}$$

Sezt man weiter $y = \delta$ für $x = q$, so erhält man völlig eben so

$$D = (\frac{\delta}{q} - A - B.\frac{q-m}{m} - C.\frac{(q-m)(q-n)}{m.n}) \times \frac{mnp}{(q-m)(q-n)(q-p)}$$

wo das Gesetz des Fortgangs der Coefficienten leicht in die Augen fället, so daß sich ohne weitere Rechnung

$$E = (\frac{\varepsilon}{r} - A - B.\frac{r-m}{m} - C\frac{(r-m)(r-n)}{mn} - D.\frac{(r-m)(r-n)(r-p)}{mnp}) \times \frac{mnpq}{(r-m)(r-n)(r-p)(r-q)}$$

und so F, G.... von selbst geben.

Für die zweyte Formel ♀ erhält man auf eben diese Art:

$A = \alpha : m$

$$B = (\frac{\beta}{n} - A). \frac{m^2}{m^2 - n^2}$$

$$C = (\frac{\gamma}{p} - A - B.\frac{p^2 - m^2}{m^2}). \frac{m^2 n^2}{(p^2 - m^2)(p^2 - n^2)}$$

D =

$$D=\left(\frac{\delta}{q}-A-B.\frac{q^2-m^2}{m^2}-C\frac{(q^2-m^2)(q^2-n^2)}{m^2n^2}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{m^2n^2p^2}{(q^2-m^2)(q^2-n^2)(q^2-p^2)}\right.\text{ u. s. w.}$$

Und eben so in der dritten Formel ♀

$$A=\alpha:m^2$$

$$B=\left(\frac{\beta}{n^2}-A\right).\frac{m^2}{n^2-m^2}$$

$$C=\left(\frac{\gamma}{p^2}-A-B.\frac{(p^2-m^2)}{m^2}\right).\frac{m^2n^2}{(p^2-m^2)\,(p^2-n^2)}$$

u. s. w.

Wo sich allemal die folgenden Coefficienten D, E, ... aus dem in die Augen fallenden Gesetz des Fortgangs leicht hinschreiben lassen, ohne daß man sie besonders zu berechnen nöthig hätte.

§. 322.

Nun wollen wir auch die Formeln des *de la Caille* vortragen, so wie sie in seinen Lection. Element. Astronomiæ Geometricæ & Physicæ. 4. Viennæ. 1757, und aus ihm in *Scherffer* in s. Institut. Astronomiæ Theoreticæ vorkommen.

Wenn das Gesetz gegeben wäre, nach welchem die Functionen aus ihren Wurzeln bestimmt werden, so wäre alle Schwührigkeit gehoben; man hat also darauf zu arbeiten, daß man das Gesetz entdecke, nach welchem die gegebenen Reihen fortgehen.

Man setze:

I. Jede Reihe bestehe nur aus zwey Gliedern

m; n;

a; b;

Und

und das Gesetz, nach welchem die Function aus der Wurzel bestimmt wird, sey in dieser Formel enthalten:

$$g + hx$$

worinn x jede Wurzel bedeutet; g und h aber beständige Grössen, deren Werth von dem Werth der Grössen a und b abhangt, und der nach folgender Berechnungsart bestimmt wird. Man setze zuerst $x = m$, so erhält man die Gleichung

$$g + hm = a$$

Sodann setze man $x = n$, so kommt eine andere Gleichung

$$g + hn = b$$

Nun suche man g und h durch Substitution aus diesen beyden Gleichungen, so bekommt man

$$g = \frac{an - bm}{n - m}$$

$$\text{und } h = \frac{b - a}{n - m}$$

Es wird also das Gesetz $g + hx =$

$$= \frac{an - bm}{n - m} + \frac{(b - a)}{(n - m)}x$$

II.) Ferner setze man, jede Reihe bestehe aus drey Gliedern,

$$m;\ n;\ p;$$
$$a;\ b;\ c;$$

und ihr Gesetz sey in folgender allgemeinen Formel ausgedrückt:

$$g + hx + kx^2.$$

Man suche nun auf gleiche Weise den Werth von g, h, k, durch die drey Gleichungen:

g+

$$g + hm + km^2 = a;$$
$$g + hn + kn^2 = b;$$
$$g + hp + kp^2 = c.$$

So findet man nach gehörigen Substitutionen

$$g = \frac{an - bm}{n - m} + \left(\frac{a(p-n) - b(p-m) + c(n-m)}{(n-m)(p-m)(p-n)}\right) mn$$

$$h = \frac{b - a}{n - m} + \left(\frac{a(p-n) - b(p-m) + (c-m)}{(n-m)(p-m)(p-n)}\right)(-n-m)$$

$$k = \frac{a(p-n) - b(p-m) + (c-m)}{(n-m)(p-m)(p-n)}$$

aus denen leicht das allgemeine Gesetz $g + hx + kx^2$ hergeleitet wird.

III.) Man setze, jede Reihe habe vier Glieder, und das allgemeine Gesetz sey $g + hx + kx^2 + lx^3$; so wird es vier Gleichungen geben, wenn man x nach und nach den Wurzeln m, n, p, q gleich setzet; woraus, wie oben, die Werthe der beständigen Grössen g, h, k, l gefunden werden; u. s. f.

*) Man kann mit Newton annehmen, durch jede Wurzel werde die Abscisse einer krummen Linie, und durch ihre Function die zugehörige Semiordinate vorgestellt; so wird solchergestalt die Aufgabe aufgelöst werden können: Eine krumme Linie aus dem Geschlechte der Parabeln durch beliebige gegebene Punkten zu beschreiben.

§. 323.

Nun hat bereits *de la Caille* den Werth der beständigen Grössen g, h, k, l für verschiedene Fälle, die sich ergeben können, berechnet, und die Formeln

zu Berechnung der Wurzeln, die den grösten und kleinsten Functionen zukommen, und umgekehrt, gegeben; nach der Methode vom Kleinsten und Grösten. (Methodo de Maximis et Minimis.)

I. Formel für drey gegebene Wurzeln, und drey Functionen.

Die allgemeine Gleichung ist $= kx^2 + hx + g$;
die Formel fürs gröste und

$$\text{kleinste } x = -\frac{h}{2k}$$

1ster Fall.

Es seyen gegeben: $y = a$; $x = m$
$y = b$; $x = n$
$y = c$; $x = p$
oder die Reihen m; n; p;
a; b; c;

$$\text{So kommt } k = \frac{a(p-n) - b(p-m) + c'n-m)}{(p-n)(p-m)(n-m)}$$

$$h = \frac{b-a}{n-m} - k(n+m)$$

$$g = \frac{an-bm}{n-m} + kmn$$

2ter Fall.

Es seyen gegeben:

$y = o$; $x = o$ oder o; n; p
$y = b$; $x = n$ o; b; c
$y = c$; $x = p$

So kommt $k = \frac{cn - bp}{pn(p-n)}$

$h = -\frac{bp^2 - cn^2}{pn(p-n)}$

$g = o$

3ter Fall.

Es seyen gegeben

$y = o$; $x = o$ oder o; 1; 2

$y = b$; $x = 1$ o; b; c

$y = c$; $x = 2$

So kommt $k = \frac{1}{2}c - b$

$h = 2b - \frac{1}{2}c$

$g = o$

II. Formel für gegebene vier Wurzeln und vier Functionen:

Die allgemeine Gleichung ist $= lx^3 + kx^2 + hx + g$

Die Formel für das gröste und

kleinste $x = \pm\sqrt{(\frac{k^2}{9l^2} - \frac{h}{3l})} - \frac{k}{3l}$.

1ster Fall.

Es sind gegeben:

$y = a$; $x = m$ oder m; n; p; q

$y = b$; $x = n$ a; b; c; d

$y = c$; $x = p$

$y = d$; $x = q$

So kommt

$$l = \frac{\left\{\begin{array}{l} a(q-p)(p-n)(q-n) - b(q-p)(q-m)(p-m) + \\ +c(n-m)(q-m)(q-n) - d(p-m)(p-n)(n-m) \end{array}\right.}{(p-m)(n-m)(q-p)(p-n)(q-m)(n-q)}$$

$k =$

$$k = \frac{a(p-n)}{(p-n)} - \frac{b(p-m)}{(p-m)} + \frac{c(n-m)}{(n-m)} - l(m+n+p)$$

$$h = \frac{b-a}{n-m} - l(m^2+n^2+mn) - k(n+m)$$

$$g = \frac{an-bm}{n-m} + lmn(n+m) + km^2$$

2ter Fall.

Es sind gegeben

$y=o$;	$x=o$	oder	o; n; p; q
$y=b$;	$x=n$		o; b; c; d
$y=c$;	$x=p$		
$y=d$;	$x=q$		

So kommt

$$l = \frac{cnq(q-n) - bpq(q-p) - dnp(p-n)}{npq(p-n)(q-p)(n-q)}$$

$$k = \frac{cn-bq}{pn(p-n)} - l(n+p)$$

$$h = \frac{b}{n} - lnm - kn$$

$$g = o$$

3ter Fall.

Es sind gegeben:

$y=o$;	$x=o$	oder	o; 1; 2; 3
$y=b$;	$x=1$		o; b; c; d
$y=c$;	$x=2$		
$y=d$;	$x=3$		

So kommt

$$l = \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{6}d$$

$$k = 2c - \tfrac{5}{2}b - \tfrac{1}{2}d$$

$$h = 3b - \tfrac{3}{4}c + \tfrac{1}{3}d$$

$$g = o$$

III. Formel für 5 gegebene Beobachtungen.

$y=0;\ x=0$ oder 0; 1; 2; 3; 4
$y=b;\ x=1$ 0; b; c; d; e
$y=c;\ x=2$
$y=d;\ x=3$
$y=e;\ x=4$

Das Geſetz oder die allgemeine Gleichung iſt hier:

$$g+hx+kx^2+lx^3+fx^4$$

Und es kommt:

$$f=\tfrac{1}{24}e-\tfrac{1}{6}d+\tfrac{1}{4}c-\tfrac{1}{6}b$$
$$l=-\tfrac{1}{4}e+1\tfrac{1}{6}d-2c+1\tfrac{1}{2}b$$
$$k=\tfrac{11}{24}e-2\tfrac{1}{3}d+4\tfrac{3}{4}c-4\tfrac{1}{3}b$$
$$h=-\tfrac{1}{4}e+1\tfrac{1}{3}d-3c+4b$$
$$g=0$$

IV. Formel für die zwey Reihen von ſechs gegebenen Beobachtungen.

$y=0;\ x=0$ oder 0; 1; 2; 3; 4; 5
$y=b;\ x=1$ 0; b; c; d; e; Φ
$y=c;\ x=2$
$y=d;\ x=3$
$y=e;\ x=4$
$y=\Phi;\ x=5$

So kommt

Nach dem Geſetz:

$$g+hx+kx^2+lx^3+fx^4+\lambda x^5$$

$$\lambda=\tfrac{1}{120}\Phi-\tfrac{1}{24}e+\tfrac{1}{12}d-\tfrac{1}{12}c+\tfrac{1}{24}b$$
$$f=-\tfrac{1}{12}\Phi+\tfrac{11}{24}e-d+\tfrac{13}{12}c-\tfrac{7}{12}b$$
$$l=\tfrac{7}{24}\Phi-\tfrac{41}{24}e+\tfrac{49}{12}d-\tfrac{59}{12}c+\tfrac{131}{24}b$$
$$k=-\tfrac{5}{12}\Phi+\tfrac{61}{24}e-\tfrac{13}{2}d+\tfrac{467}{12}c-\tfrac{167}{12}b$$
$$h=\tfrac{1}{6}\Phi-\tfrac{5}{4}e+\tfrac{10}{3}d-35c+10b$$
$$g=0$$

§. 324.

Zur Anwendung und Erläuterung der eben gegebenen Formeln diene folgendes

Beyspiel.

*) Man verlangt den Ort des Merkurs auf den 27. Jun. 7 St. Also ist in der zweyten Generalformel die Wurzel oder $x = 27\frac{7}{24}$, das ist 27 Tage des Junius und $\frac{7}{24}$ eines Tages, oder 7 Stunden. Nun interpolire man nach dem ersten Fall der zweyten Formel, oder nehme die Observation des 25, 26, 27, 28sten Junius, also wird

$m = 25$; $n = 26$; $p = 27$; $q = 28$.

Die correspondirenden Buchstaben a, b, c, d bedeuten die diesen Tagen correspondirende Oerter des Merkurs am Himmel, die man so genau als möglich diese 4 Tage über beobachtet haben muß. Sie seyen demnach

$a = 2^s\ \ 5°\ 39'\ 51''$
$b = 2^s\ 12°\ \ 2'\ 51''$
$c = 2^s\ 18°\ 26'\ 18''$
$d = 2^s\ 24°\ 48'\ 38''$

(wo s das Signum bedeutet; 2 Signa aber 60°)

nun suche man nach dem ersten Fall der zweyten Formel die Function, die der Wurzel $x = 27\frac{7}{24}$ correspondiret.

Bey dieser etwas weitläufigen Rechnung lassen sich nun allerley Verkürzungen nach arithmetischen Gründen anbringen. Weil bey allen vier Werthen der Ausdruck 2^s vorkommt, so lasse man diese weg, und sehe nur auf die Grade, Minuten und Secunden: am Ende aber müssen diese 2 Signa wieder addirt

dirt werden. Weil ferner die Tage 25, 26, 27, 28 in arithmetischer Progression fortgehen, so kann man dafür 0, 1, 2, 3 setzen, wo die Verhältniß einerley ist, nur muß man sich dabey am Ende der Rechnung erinnern, daß 0 den 25sten, 1 den 26, 2 den 27, 3 den 28 Junius bedeuten. Endlich kann man nach der Lehre von den kleinsten Differenzreihen auch die erste Function = 0 setzen, und für b die Differenz zwischen der ersten und zweyten Function, also b=6° 23′ 0″; für c die Differenz zwischen der ersten und dritten Function, also c = 12° 46′ 27″, und für d die Differenz der ersten und vierten Function, also d = 19° 8′ 47″. Dieses alles in Secunden verwandelt, und die Functionen und Wurzeln gegen über gesezt, gibt:

a = 0″	m = 0
b = 22980″	n = 1
c = 45987″	p = 2
d = 68927″	q = 3

Da kommt man nun auf den dritten und leichtesten Fall der zweyten Formel durch diese Abkürzungen, und alles läßt sich nun leicht berechnen; denn wenn man für l, k, h, g daselbst die Werthe berechnet, und substituirt, so hat man

$$l = 15\frac{2}{3};\ k = 61\frac{1}{2};\ h = 22935\frac{1}{6};\ g = 0$$

also die ganze Interpolationsformel

$$lx^3 + kx^2 + hx + g = -15\frac{2}{3}x^3 + 60\frac{1}{2}x^2 + \\ + 22935\frac{1}{6}x;$$

Nun ist x = 2 Tag 7 St. weil der 27 Jun. von dem gefragt wird, wenn der 25ste = 0 (wie wir in der Abkürzung gesezt) der 2te Tag ist, und daher die 7 St. noch addirt, x = 2 T. 7 St. $= 2\frac{7}{24} = 2{,}29167$. Diesen Werth in der Formel substituirt, gibt 52689″ d. i. 14° 38′ 9″, wenn man sie auf Grade und

Mi-

Minuten reducirt; und das ist die Differenz zwischen der ersten Function, und zwischen der Function, die man suchte; man muß also zur ersten Function die gefundene Differenz addiren, so hat man die gesuchte Function, und in der Aufgabe den wahren Ort des Merkurs, für den 27 Jun. um 7 Uhr. Er ist nemlich nach dieser Rechnung, wenn man zu $2^s\ 5^\circ\ 39'\ 51''$ die gefundene Differenz $14^\circ\ 38'\ 9''$ addirt, auf das gegebene Zeitmoment $= 2^s\ 20^\circ\ 18'\ 1''$.

Eben so kann man umgekehrt aus dem Ort die Zeit finden. Man bestimme abermal aus dem, was gegeben ist, die Coefficienten der Generalgleichung, und nehme für y den gegebenen Ort; so ist also x zu suchen. Gesezt also, man frage, in welcher Zeit der Mittelpunkt des Merkurs in $2^s\ 20^\circ\ 18'\ 1''$ gewesen sey; Um der gleichen Zwischenzeiten der Beobachtungen willen, nehme man eine arithmetische Progression, und wegen leichterer Rechnung 0, 1, 2, 3. Ziehet man den am 25 Jun. beobachteten Ort vom gegebenen Ort ab, so wird $y = 14^\circ\ 38'\ 13'' = 52693''$. Die Coefficienten bleiben eben dieselbe, wie im vorigen Problem, nemlich $l = -15,8$; $k = 61,5$; $h = 22935,3$; $g = 0$. Die allgemeine Gleichung $lx^3 + kx^2 + hx + g - y = 0$ geht also in folgende über: $-15,8x^3 + 61,5x^2 + 22935,3.x - 52693$. Wenn man in dieser für x substituiret $2,29167 = 2\frac{7}{24}$, so muß die Gleichung beynahe auf 0 gebracht werden, und $2\frac{7}{24}$ wird eine von ihren Wurzeln seyn; die übrige ergeben sich beynahe 39, 1 und $-37\frac{1}{3}$, sie sind aber hieher nicht brauchbar, denn aus den Angaben ergibt sich schon, die gesuchte Zeit müsse zwischen den 27 und 28 Jun. fallen, denn am 27 war $y = 12^\circ\ 46'\ 30''$ und am 28 war $y = 19^\circ\ 8'\ 52''$ wozwischen $14^\circ\ 38'\ 13''$ innen stehet. Addirt man daher 2 T.

7 St. zu 25, so kommt 27 Jun. 7 St. zu welcher Zeit Merkur in $2^s\ 20^\circ\ 18'\ 1''$ war.

§. 325.

Die Methode der Differenzen kann eben so wohl auch zum Interpoliren angewendet werden.

Wenn $y, y_1, y_2 \ldots y_n$ nach einander folgende Glieder einer Hauptreihe bedeuten; $\Delta 1, \Delta 2, \Delta 3 \ldots$ die ersten Glieder der Differenzreihe, so ist, wie oben gezeigt worden (§. 258. 259.)

$$y_n = y + n.\Delta 1 + \frac{n.(n-1)}{1.2}.\Delta 2 + \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}.\Delta 3 \ldots$$

§. 326.

Diese Interpolation braucht man häufig in der Astronomie, wo man bis auf zweyte, auch dritte Differenzen gehet.

Z. B. Aus *de la Lande* Astronomie S. 3181. der 1. Ausgabe.

Tage	Länge des ☾	I. Diff.	II. Diff.	III. Diff.
1	13.4° 34′ 3″			
2	1 17 41 1	13° 6′ 58″		
3	2 1 11 33	13 30 32	23′ 34″	
4	2 15 7 15	13 55 42	25 10	1′ 36″
5	2 29 33 55	14 26 40	30 58	5 48

Man verlangt y für den zweyten Tag 15^h

Man setze also:

1.) $y = 13.\ 17^\circ\ 41'\ 1''$ so ist

$\Delta 1 = \quad 13\ \ 30\ 32 = 48632''$

$\Delta 2 = \quad\ \ 25\ 10 = 1510$

$n = \frac{15}{24}$; $n - 1 = -\frac{9}{24}$

2.) Also

2.) Also log. $\frac{15}{24}$ = log. n = 0,7958801 — 1
log. 48632 = log. Δ1 = 4,6869221
Summe = 4,4828022

3.) log. n = 0,7958801 — 1
log. $\frac{9}{24}$ = l(1 — n) = 0,5740313 — 1
log. 0,5 = 0,6989700 — 1
log. 1510 = log. Δ2 = 3,1789769
Summe = 2,2478583

4.) Aus der Summe (2.) ist n. Δ1 = 30395″
und aus der Summe (3.) ist $\frac{n.(n-1)}{1.2}$. Δ2 = — 176,9

$$n.\Delta 1 + \frac{n.(n-1)}{1.2}.\Delta 2 = 30218''$$

8° = 28800″

1418″

23′ = 1380

38

Aus der Tafel am Ende der Kästnerischen 4ten Astronom. Abhandlung.

Also $n.\Delta 1 + \frac{n.(n-1)}{1.2}.\Delta 2$ = 8° 23′ 38″

zu y = 1.3.1741 1

gibt y^n = 1.3. 26° 4′ 39″

für die Länge des ☾ den 2. Tag 15h.

Anmerkungen.

*) Wenn die ersten Differenzen gleich werden, so hat man zum Interpoliren nur n. Δ1. Das sind die gewöhnlichen Proportionaltheile. So sind bey den Logarithmen, für die 7 Decimalstellen, in denen man sie braucht, die ersten Differenzen gleich.

**) Wollte man im vorigen Beyspiel sehen, ob die dritte Differenz 548″ was beträchtliches

ändere, so müßte man $\frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}.548$ berechnen; Es würde aber höchstens nur ein paar Sekunden betragen, weil $\frac{n.(n-1)}{1.2}$ nur Hunderttheile enthält.

(S. Langsdorf Erläuter. über die Käſtneriſche Analyſ. des Unendl. S. 219. folg.)

§. 327.

Je näher einander die Werthe m, n, p... von x, denen die gegebenen Werthe α, β, γ... von y zugehören, liegen, und je mehr die Werthe von y denen von x proportionirt ſind, deſto genauer muß man aus denen einander zugehörigen gegebenen Werthen m, n, p... von x, und α, β, γ... von y durchs Interpoliren die Werthe von y finden, welche denen zwiſchen m, n, p... liegenden Werthen von x zugehören.

Z. B. Es ſey für

$x = m = 82$	$y = \alpha = 1{,}9138$
$= n = 83$	$\beta = 1{,}9190$
$= p = 84$	$\gamma = 1{,}9242$
$= q = 85$	$\delta = 1{,}9294$

wo die Werthe von y die Brigg. Logarithm. der Werthe von x ſind. So gibt die zweyte Formel §, deren wir uns hiebey bedienen wollen:

$$y = \frac{\alpha}{m}.x + (\frac{\beta}{n} - A)\frac{m^2}{n^2-m^2}.x.\frac{x^2-m^2}{m^2} + \ldots$$

$$= \frac{1,9138}{82}.x + (\frac{1,9190}{83} - \frac{1,9138}{82}) \cdot \frac{82^2}{165}.x.(\frac{x^2-82^2}{82^2})$$

$$+(\frac{1,9242}{84} - \frac{1,9138}{82} - B.\frac{84^2-82^2}{82^2}) \times$$

$$\times \frac{82^2.83^2}{(84^2-82^2).(84^2-83^2).x.(x^2-82^2).(x^2-83^2)}$$

$$\frac{}{82^2.83^2}$$

$$= 0,02333.x - 0,0000012.(x^3 - 6724.x) -$$

$$-0,00007.x.(x^2-82^2).(x^2-83^2) + \ldots (\odot)$$

Sezt man hier $x = 83$, so wird

$y = 0,02333.83. - 0,0000012.(571787 -$

$- 558092) = 1,93639 - 0,0164 =$

$= 1,919 \ldots$

wie sich für log. 83. als den Werth von y gehört.

Wollte man nun für $x = 83,5$ den Werth von x, d. i. den log. 85,5 durchs Interpoliren finden, so sezte man nur $x = 83,5$; das gäbe, wenn man die beyden ersten Glieder von $\odot$ gebrauchte:

$y = 0,0233.83,5 - 0,0000012\,(83,5^3 -$

$- 6724.83,5)$

$= 1,945 \ldots . - 0,024 = 1,921 \ldots .$

Wie man auch in den Tafeln findet, wenn man die Charakteristik von log. brigg. 835 um 1 vermindert.

§. 328.

1.) Die Sache beym Interpoliren wird immer ungewisser,
   a.) je höhere Potenzen man gebrauchen muß.
   b.) immer aber ist es sehr mißlich, zwischen ein paar weit von einander stehende Glieder einzuschalten.

2.) Kästner hält (Langsdorf a. a. O.) das Interpoliren durch Differenzenreihen noch für die sicherste Methode.

3.) Es kommt überhaupt bey dem Interpoliren viel darauf an, daß man die Form der Gleichung oder der unendlichen Reihe kenne, die man zum Grund legen muß, weil man sonst anstatt convergirender Formeln solche findet, welche wenig oder gar nicht convergiren. (S. Lambert Beytr. III. S. 70. ff.)

4.) Ferner gehet die Interpolationsmethode in solchen Fällen, wo die Werthe von α, β, γ, δ ꝛc. wechselsweise positiv und negativ sind, nicht wohl an, weil alsdenn die Coefficienten A, B, C, D ꝛc. wenig oder gar nicht convergiren. Man muß in solchem Falle eine Reihe von ganz anderer Form zum Grund legen. (S. Lambert a. a. O. S. 74. ff.)

§. 329.

Zu der Absicht des Interpolirens werden in den Berliner Ephemeriden die Werthe x; $\frac{x.(x-1)}{1.2}$; $x.\frac{(x-1).(x-2)}{1.2.3}$ .... für unterschiedene vorkommende

mende Grössen von x in Tafeln angegeben. Auch in J. C. Schulze neuer und erweit. Sammlung Logarithmischer, Trigonometrischer und anderer Mathemat. Tafeln. Berl. 1778. Auch in J. H. Lambert Zusätzen zu den Logarithmischen und Trigonometrischen Tabellen. Berl. 1770. Tab. XXXVIII. S. 89. f.

Das dritte Kapitel.

Von den Verbindungen und Versetzungen der Grössen. Combinationen.

§. 330.

Combinationen sind Zusammenstellungen einer gewissen Anzahl Dinge, je zwey und zwey, je drey und drey, je vier und vier ꝛc.

Und man hat nun zu suchen, wie viele solcher Combinationen in jedem Falle möglich sind.

§. 331.

Bey einer einzigen Sache a ist keine Combination möglich.

Bey zwey Sachen a und b ist nur die einzige Combination möglich: ab.

Bey drey Sachen, a, b, c, deren jederzeit zwey genommen werden sollen, sind drey möglich:

ab, ac, bc.

Bey vieren sind auf eben diese Weise, wenn nur zwey zusammen kommen sollen, sechs Combinationen:

ab, ac, ad, bc, bd.

Bey

Bey fünf sind zehen möglich:
ab, ac, ad, ae, bc,
bd, be, cd, ce, de.

Ueberhaupt, so oft eine neue Sache dazu kommt, so bleiben nicht nur alle Combinationen, welche vorher statt hatten, sondern es kommen auch noch so viele neue Combinationen dazu, als vorher combinirte Dinge waren, indem nemlich jedes noch mit einem neuen zusammengesezt wird.

Schreibt man die jedesmal um 1 zunehmende Anzahl der Dinge in eine Reihe, und die dabey mögliche Combination darunter:

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8....
0. 1. 3. 6. 10. 15. 21. 28....

so siehet man, daß jede untere entsteht, wenn man die obere in die vorhergehende obere multiplicirt, und das Produkt durch 2 dividirt.

z. B. $3 = \frac{3 \cdot 2}{2}$; $15 = \frac{6 \cdot 5}{2}$; $28 = \frac{8 \cdot 7}{2}$

Ist also die Menge der Dinge $= m$, so ist die Anzahl der Combinationen $= \frac{m(m-1)}{2}$

oder $\frac{m-1}{1} \cdot \frac{m}{2}$

*) Man siehet, daß diese auf einander folgende Zahlen der Combinationen die sogenannte Triangularzahlen sind. S. oben.

§. 332.

Sollen je drey und drey genommen werden, und es sind der Dinge
Eins, oder Zwey, so ist keine Combination möglich.
Drey, so ist eine, a, b, c, möglich.

Sind

Sind der Dinge 4, so gibt es vier Combinationen:
abc, abd, acd, bcd.
Sind der Dinge 5, so kommen zehen Combinationen:
abc, abd, abe, acd, ace,
ade, bcd, bce, bde, cde.
u. s. w.
Schreibt man die Zahlen der Dinge, und der dabey möglichen Combinationen wie vorher unter einander:

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8....
0. 0. 1. 4. 10. 20. 35. 56....

so findet man jede untere, wenn man die obere in ihre beyde vorhergehende multiplicirt, und das Produkt mit 6 dividirt.

$$\text{z. B. } 10 = \frac{5.4.3}{3.2.1}; \quad 56 = \frac{8.7.6}{1.2.3}$$

oder allgemein:

$$\frac{m-2}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m}{3}.$$

und die untere Zahlen obiger Reihe heissen Triangular-Pyramidalzahlen.

Sollen je 4 und 4 genommen werden, und es sind der Dinge 1, 2, 3, so ist keine; sind der Dinge 4, so ist eine; sind ihrer 5, so sind 5; sind ihrer 6, so sind 15 Combinationen möglich. Die abermals also unter einander gesezte Zahlen

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8....
0. 0. 0. 1. 5. 15. 35. 70....

sind Triangular-Pyramidalzahlen vom anderen Geschlechte; und es entsteht jede untere, wenn man die obere in ihre drey vorhergehende multiplicirt und durch 24, oder 1, 2, 3, 4 dividirt.

$$\text{z. B. } 70 = \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}$$

Ist also abermal die Menge der Dinge = m, so ist die Zahl der Combinationen

$$\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-1}{3}\cdot\frac{m}{4}.$$

§. 333.

Aus dem bisherigen folget, daß wenn die Menge der Dinge m bleibet, und die Zahl derer, die zusammen genommen werden sollen, n heisset, die Zahl der Combinationen sey:

$$\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n+1}{2}\cdot\frac{m-n+3}{3}\cdots\frac{m}{n}$$

Z. B. Es sollen die Dinge 8 seyn, und jedesmal 4 zusammen genommen; so ist $m=8$, und $n=4$; also

$$\frac{5}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{8}{4}=\frac{1680}{24}=70.$$

*) Wie oft kann man aus 40 Karten 9 Karten nehmen, daß das Spiel nicht das nemliche sey?

$$\frac{40.39.38.37.36.35.34.33.32}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}=273,438,880.$$

§. 334.

Verlangt man alle mögliche Combinationen einer gewissen Anzahl Dinge, wenn deren zwey und zwey, drey und drey, vier und vier zusammen genommen werden; so verstehet sich von selbst, daß man die bereits einzel gefundene Combinationen vor zwey und zwey, vor drey und drey, ꝛc. zusammen addiren muß.

Wenn

Wenn also die Menge der Dinge immer m bleibt, so sind alle mögliche Combinationen:

$$\frac{m.m-1}{1.2}+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}+$$
$$+\frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}+\ldots.$$

§. 335.

Nach dem BinomialLehrsatz ist die Dignität m von $a+b=$

$$a^m+\frac{m}{1}a^{m-1}b+\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}a^{m-2}b^2+$$
$$+\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}a^{m-3}b^3+$$
$$+\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}a^{m-4}b^4+\ldots.$$

Sezt man nun $a=b=1$, also $a+b=2$, so ist die Dignität m von $2=$

$$1+\frac{m}{1}+\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}+\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}+$$
$$+\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3}{4}\ldots.$$

Lässet man an dieser Dignität m von 2 die beyden vordersten Glieder $1+\frac{m}{1}$ weg, so ist der Ueberrest mit obiger Reihe einerley. Demnach ist die Anzahl aller möglichen Combinationen von m Dingen $=2^m-1-m$
z. B. von 6 Dingen $=2^6-7=64-7=57$.

§. 336.

Versetzungen.

Fragt man, wie oft eine gewisse Anzahl Dinge ihren Ort unter einander verwechslen könne, so ist klar, daß

Eine Sache nur Einen Ort habe; die Zahl der Stellungen ist also = 1.

Zwey Dinge können auf zweyerley Art beysammen stehen:

ab und ba

also die Zahl der Stellungen ist 1. 2.

Sollen es drey seyn, so kann das dritte auf dreyerley Weise zu jedem der zwey vorigen gesezt werden

abc, acb, cab; bac, bca, cba.

Man erhält also 1. 2. 3. oder 6 veränderte Stellungen.

Sollen der Dinge 4 seyn, so kann das vierte zu jedem der 6 vorigen auf viererley Art gesezt werden:

abcd, abdc, adbc, dabc;
cabd, cadb, cdab, dcab;
bcad, bcda, bdca, dbca;

---

acbd, acdb, adcb, dacb;
bacd, badc, bdac, dbac;
cbad, cbda, cdba, dcba.

Man erhält also 24 Veränderungen, oder 1. 2. 3. 4.

Demnach können n Dinge ihren Ort 1. 2. 3. 4 ....n — 2. n — 1. nmal unter einander verändern.

*) So können 8 Personen an einer Tafel 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 40320mal speisen, und ihre Plätze wechslen, bis sie wieder

der genöthigt sind, alle ihre Stellen wieder in voriger Ordnung einzunehmen.

Ueberhaupt ist bey der Anzahl der Dinge	Die Anzahl der Versetzungen
I	1 = 1
II	2. 1 = 2
III	3. 2. 1 = 6
IV	4. 3. 2. 1 = 24
V	5. 4. 3. 2. 1 = 120
VI	6. 5. 4. 3. 2. 1 = 720
VII	7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 5040
VIII	8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 40320
IX	9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1 = 362880
X.	10. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2 1 = 3628800
u. s. w.	

§. 337.

Versetzungen der 24 Alphabetsbuchstaben.

Man gebe einem jeden Buchstaben einen Raum von einer Quadratlinie, so fasset ein Quadratzoll 144 Buchstaben. Werden diese 144 mit sich selbst multiplicirt, welches auch die Summe der Quadratzolle ist, die ein Quadratschuh enthält, so kommen zum Produkt 20736 Buchstaben, welche auf der Oberfläche eines Quadratschuhes stehen können. Rechnet man nun auf eine Quadrattoise 36 Quadratschuhe, so kommen 20736. 36 = 746496 Buchstaben auf eine Quadrattoise. Hat nun ferner eine Quadratmeile, welche 2000 Toisen lang ist, eine Oberfläche von 4000,000 Quadrattoisen; so kommen

746496. 4000000 = 2985984000000

Buchstaben auf die Oberfläche einer Quadratmeile.

Die Oberfläche der Erde aber ist ungefähr = 33,000,000 Quadratmeilen, folglich ist das Produkt, mit obiger Zahl multiplicirt,

= 98‴537,472″000,000′000,000

Buchstaben, die auf der Oberfläche der Erde stehen können.

Jezt multiplicire man die Zahlen von 1 bis 24, so erhält man für die Zahl der Versetzungen der 24 Alphabetsbuchstaben

620,448‴401,733″239,439′360,000

welche mehr als 600mal grösser ist, als die Anzahl der Buchstaben, die auf der ganzen Oberfläche des Erdbodens stehen könnten: und weil eine der Versetzungen aus 24 Buchstaben besteht, so folgt, daß eine 14400mal grössere Oberfläche hiezu erfordert würde, wenn sie alle darauf stehen sollten.

1000 Millionen Schreiber werden in 1000 Millionen Jahren nicht alle mögliche Versetzungen der 24 Alphabetsbuchstaben schreiben können; wenn auch jeder täglich 40 Seiten schreibt, deren jede 40 verschiedene Versetzungen der 24 Buchstaben enthält. Nemlich, ein Schreiber schreibt täglich 40 Seiten, jede von 40 Ordnungen = 1600 Ordnungen täglich. Man setze 1 Jahr = 366 Tage, so kommen 1600.366 = = 585,600 Ordnungen eines Schreibers jährlich. Es kämen also auf einen Schreiber in 1000 Millionen Jahren

585″600,000′000,000 Ordnungen:

und auf 1000 Millionen Schreiber in dieser Zeit

585,600‴000,000″000,000′000,000

allein die 24 Buchstaben lassen sich, wie oben herausgekommen, weit öfters versetzen.

§. 338.

Verbindungen und Versetzungen zugleich.

Hier untersucht man zuerst, wie viele Combinationen möglich sind, und multiplicirt sodann diese Anzahl in die Zahl der Versetzungen, die bey jeder Combination statt hat.

Z. B. Bey 5 Sachen, deren immer drey und drey beysammen stehen sollen, sind nach dem obigen 10 Combinationen möglich; jede 3 Dinge aber lassen sich 1. 2. 3mal versetzen; also sind 1. 2. 3. 10 = 60 verschiedene Stellungen von je 3 uhd 3 unter 5 Dingen möglich.

Wenn von m Dingen jedesmal n sollen zusammen genommen werden, so sind die Combinationen multiplicirt in die Zahl der Versetzungen

$$=\left(\frac{m-n+1).(m-n+2).(m-n+3)\ldots m}{1 \quad . \quad 2 \quad . \quad 3 \quad \ldots n}\right) 1.2.3\ldots n =$$

$$=(m-n+1).(m-n+2).(m-n+3)\ldots.m$$

Z. B. Wenn $m=5$; $n=3$, so ist $(5-2)$ $(5-1)\,5=60$.

§. 339.

Verbindungen, Versetzungen und Verdopplungen zugleich.

Wollte man auser der Verbindung und Versetzung auch noch auf die Verdopplung sehen; so kann man die Anzahl aller möglichen Veränderungen folgender Gestalt untersuchen:

Es seyen 2 Dinge, a und b, so ist Eine Verbindung möglich = ab; und Eine Versetzung ba;

und 2 Verdoppelungen, aa, bb; also zusammen $4 = 2^2$.

Es seyen von 3 Dingen 2 und 2 zu combiniren; so sind 3 Verbindungen möglich, ab, ac, bc; 3 Versetzungen, ba, ca, cb; und 3 Verdoppelungen, aa, bb, cc; also zusammen $9 = 3^3$.

Es seyen von 4 Dingen 2 und 2 zu combiniren; so sind 6 Verbindungen möglich, nemlich ab, ac, ad, bc, bd, cd, und 6 Versetzungen, ba, ca, da, cb, db, dc, und 4 Verdoppelungen, aa, bb, cc, dd, also zusammen $16 = 4^2$.

Gleichergestalt von m Dingen m^2.

Von je 3 und 3 suche man zuerst die mögliche Verdoppelungen. Folgende Tabelle legt sie vor Augen:

aaa, bbb, ccc	ddd	fff	ggg
aab, aba, baa	aad, ada, daa	aaf, afa, faa	aag, aga, gaa
aac, aca, caa			bbg, bgb, gbb
bba, bab, abb	bbd, bdb, dbb	bbf, bfb, fbb	
bbc, bcb, cbb			ccg, cgc, gcc
cca, cac, acc	ccd, cdc, dcc	ccf, cfc, fcc	
ccb, cbc, bcc	dda, dad, add	ddf, dfd, fdd	ddg, dgg, gdd
3 Sachen 21 Verdoppelungen.	ddb, dbd, bdd		ffg, fgf, gff
		ffa, faf, aff	
	ddc, dcd, cdd	ffb, fbf, bff	gga, gag, agg
4 Sachen haben 40 Verdoppelungen.		ffc, fcf, cff	ggb, gbg, bgg
		ffd, fdf, dff	ggc, gcg, cgg
5 Sachen haben 65 Verdoppelungen.			ggd, gdg, dgg
			ggf, gfg, fgg

6 Sachen haben 96 Verdoppelungen.

Nemlich von 3 Sachen sind es 3.7; von 4 Sachen 4.10 = 40; von 5 Sachen 5.13 = 65; von 6 Sachen 6.16 = 96; von 7 Sachen 7.19 = 133; von 8 Sachen 8.22 = 176 Verdoppelungen möglich.

Zäh-

Zählet man nun hiezu die möglichen Verbindungen und Versetzungen, die aus obigem bekannt sind, nemlich von 3 Sachen 6; von 4 Sachen $4.6=24$; von 5 Sachen $10.6=60$; von 6 Sachen $20.6=120$. u. s. w. so erhält man

$21+6=27=3^3$
$40+24=64=4^3$
$65+60=125=5^3$
$96+120=216=6^3$ u. s. w.

Die Zahl der Verbindungen, Versetzungen und Verdoppelungen von m Dingen, deren jederzeit 3 zusammen genommen werden, ist also m^3.

Auf gleiche, aber mühsamere Weise, findet man diese Zahl vor 4 und 4 gleich m^4; vor 5 und $5=m^5$, vor n und $n=m^n$.

*) So geben 9 Zahlen 81 solche Veränderungen. Es ist der Fall bey der Decimalrechnung, da man 81 Verbindungen, Versetzungen und Verdoppelungen machen kann, wenn je 2 zusammen kommen sollen; sezt man endlich jeder ersten Zahl noch eine Nulle bey, so gibt es 99, bis man endlich bey 100 noch die zweyte Nulle zu Hülfe nimmt.

**) Kommen von 4 Buchstaben jeder dreymal vor, so gibt es $4^3=64$. Es ist der Fall bey den Logikalischen Modis, von denen jedoch nach Logikalischen Regeln bey wirklicher Anwendung alle übrige, bis auf 12, wegfallen.

§. 340.

Hieraus ist offenbar, daß, wenn man von einer gewissen Anzahl Dinge m alle mögliche Verbindungen, Versetzungen und Verdoppelungen sowohl zu 5

und 5, als zu 4 und 4, und zu 3 und 3 wissen will, man m^5, m^4 und m^3 zusammen addiren müsse.

Alle mögliche Veränderungen der Combinationen von m Sachen also sind $m^m + m^{m-1} + m^{m-2} + m^{m-3} + m^{m-4} + \ldots . m$

Weil man nun die Summe einer geometrischen Progression findet, wenn man den Unterschied des grösten und kleinsten Gliedes durch den um 1 verminderten Exponenten dividirt, und zum Quotienten das kleinste Glied addirt; so ist die Summe der vorliegenden Progression $= \frac{m^m - m}{m-1} + m^m$

oder $\frac{m^{m+1} - m}{m-1}$ oder $\frac{m(m^m - 1)}{m-1}$

Z. B. Wenn $m = 4$, so ist die Summe

$$= \frac{4(4^4 - 1)}{4-1} = \frac{4.255}{3} = \frac{1020}{3} = 340.$$

(Deutsche Encyclopädie. Th. VI. Artik. Combination.)

Das

Das vierte Kapitel.

Vom Anschlag der Zeit. Formeln zu der Interesse- und Rentenrechnung.

I.

Formel für den Anschlag des Werthes der Zeit in Merkantilischen Fällen.

§. 341.

In allweg hat die Zeit einen würklichen Werth, der sich durch Zahlen ausdrücken lässet. Titius im Wittenbergischen Wochenblatt 1774. n. 1. gründet den Anschlag derselben auf folgende Schlüsse: Man eignet Dingen einen Werth zu, wenn durch sie die Güte anderer Dinge bestimmt und ausgemessen werden kann. Diesen inneren Werth, diese Güte der Dinge zu bestimmen, trägt die Zeit ein grosses bey. Sie ist mit ein Theil vom Werthe aller Dinge, die im gemeinen Leben und im Gewerbe vorkommen. So beruhet z. B. der Werth der Waaren im gemeinen Leben auf diesen 3 Stücken: 1.) Auf der Zeit, welche auf die Verfertigung verwendet worden; 2.) auf dem Lohn und Unterhalt, den die Arbeiter bekommen haben; und 3.) auf dem Werth der rohen Materialien in der Waare. Da der Lohn der Arbeiter zum Theil mit von der Zeit abhängt, welche sie gearbeitet haben; so siehet man, daß die Zeit auf mehr als einerley Weise in den Werth der Waare Einfluß hat.

Die Kaufpreise aller Bedürfnisse haben also schon die Zeit im Anschlage, weil sie aus den Kosten der Waare und dem Profite in der Veräusserung bestehen. Diesem zufolge bestehen die Kosten einer Waare aus einer Summe, die aus dem Werthe der rohen dazu gebrauchten Materialien, und aus einem Produkte des ArbeitsAufwands in die Zeit zusammen gesezt ist.

Man nenne die Kosten einer Waare = K
die Zeit . . . . . = T
den ArbeitsAufwand . = A
den Werth der rohen Materien = M

so ist aus dem vorhergesagten:

$K = TA + M$ und demnach

$T = \frac{K - M}{A}$ = eigentlicher Werth der Zeit.

Es seyen die Kosten einer Waare insgesamt = 45
die rohen Materien derselben haben gegolten = 13
Aufwand für Arbeiter an Lohn und Unterhalt = 8

so ist der Werth der Zeit bey dieser Waare

$\frac{45 - 13}{8} = \frac{32}{8} = 4.$

Dieser Werth der Zeit, 4, macht aber als ein Faktor in der Gleichung $K = TA + M = 4.8 + 13$ einen ansehnlichen Theil der ganzen Kosten der Waare.

Allein, betrachtet man die Kaufpreise der Waaren noch weiter, so kommt in dieselbe noch ein neuer Werth, der zu den Kosten addirt werden muß. Es kann nemlich keine Waare für die bloße Kosten verkauft werden, sonst hätten Manufakturier und Kaufleute nichts daran. Sie hätten blos ihre Auslagen, ihr Arbeitslohn und ihre Zeit bezahlt, und keinen weiteren Profit. Bey jeder Waare ist daher noch ein billiger Profit oder eine Provision für die Veräusse-

rung

rung anzusetzen. Und dieser Profit ist ein proportionirlicher Theil der Kosten. Er ist also n Theil von K, oder $= \frac{TA + M}{n}$

Folglich wird das ganze Kaufpretium oder P seyn $=$

$$= TA + M + \frac{TA + M}{n}$$

und darinnen steckt abermal ein zweyfacher Anschlag der Zeit, einer in den Kosten und der andere in dem Profit.

II.

Formeln zur Interesserechnung.

§. 342.

Die Nutzbarkeit der Formeln, ihrer Herleitung aus einander, und ihrer logarithmischen Auflösung zeigt sich insonderheit auch in den zur Interesse- und Rentenrechnung gehörenden, und mit ihnen analogischen Aufgaben. Es folgen also mehrere dergleichen Formeln, besonders die nützliche von dem verst. Prof. Joh. Matthias Hase gegebene leichte Tafeln, welche Titius dem Wittembergischen Wochenblatt von 1781. 46. 47. St. einverleibt hat, denen ich aber vielerley andere Aufgaben, aus deren Finalgleichungen, als so vielen Grundformeln, viele andere hergeleitet werden, samt einigen analogischen Aufgaben von der Bevölkerung beygefügt und mehrere Fälle von der Rentenrechnung eingeschaltet habe.

§. 343.

I. Eigentliche Interesserechnung, mit Annahme des doppelten Interesse (Interesse aus Interesse), und zwar wenn Kapital und Interesse nachbezahlt werden.

Die Fälle, die sich hier ereignen können, sind in folgender Tabelle ausgedrückt. Es sey

a = das Kapital, so ausgeliehen wird.

b = Anzahl Jahre.

r = Verhältnis des Interesse, z. B. 5 Procent $= \frac{5}{100} = \frac{1}{20} = 0{,}05$.

R = r + 1; ist daher das Interesse 5 Procent, so ist $R = 1 + \frac{1}{20} = \frac{21}{20} = 1{,}05$.

x = die lezte Zahlung, oder die eigentliche Summe im Ganzen genommen.

	Auflösungen in Natürlichen Zahlen.			Auflösungen in Logarithm. Zahlen	
Fälle	gegeben	gesucht	Auflös.	gesucht	Auflös.
1	a, n, R	x	aR^n	lx	$la + nlR$
2	a, n, x	R	$\sqrt[n]{\frac{x}{a}}$	lR	$\frac{lx - la}{n}$
3	a, R, x			n	$\frac{lx - la}{lR}$
4	n, R, x	a	$\frac{x}{R^n}$	la	$lx - nlR$

Wir wollen die vorgestellte Fälle durch Beyspiele erläutern: zuvor aber ist überhaupt zu merken, daß in

in allen folgenden Auflösungen die Logarithmen für die Interessen folgende sind:

	der Logarithmus von R bey dem Interesse		der Logarithmus von r	
für 6	Procent	0,0253858		— 1,2218487
— 5	—	0,0211892		— 1,3010299
— 4	—	0,0170333		— 1,3979400
— 3	—	0,0128372		— 1,5228788
— 2	—	0,0086002		— 1,6989700
		lR	lr	

Beyspiele.

1ster Fall.

Es ist ein Kapital a = 1 fl. auf n = 100 Jahre ausgeliehen; das jährliche Interesse r = 5 Procent, = $= \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$; also $R = 1 + \frac{1}{20} = \frac{21}{20}$; Man fragt, wie hoch sich die Bezahlung x nach Verfluß obiger Jahre belauffe, wenn Interessen von Interessen gerechnet werden?

Aufl. nach den Logarithmen.

$lR = l\frac{21}{20} = 0{,}0211892$ also

$nlR = 100\, l\frac{21}{20} = 2{,}1189200$

$+ la = 0{,}0000000$

Summe $lx = 2{,}1189200$

Davon ist die natürliche Zahl = 131,5, oder $131\frac{1}{2}$ fl. so viel müssen von 1 fl. nach obiger Zeit und unter obigen Bedingungen bezahlt werden. (Nach abermal 100 Jahren würde es 17292 fl. und das dritte hundert Jahre durch, eben solchergestalt rentirend, 22,844000 fl. von 1 fl. anfänglich Kapital betragen.

Aufgabe.

Es legt jemand ein Kapital a zu c Procent an, und die Interessen werden jährlich zum Kapital geschlagen, wie groß ist die Summe nach 4 Jahren.

Aufl. 100 : c = a : Interesse.

Also Interesse des ersten Jahrs $= \frac{ac}{100}$

folgl. die Summe nach Einem Jahre

$$= a + \frac{ac}{100} = \frac{100a + ac}{100} = a\left(\frac{100 + c}{100}\right)$$

ferner: 100 : c = $(a + \frac{ac}{100})$: Interesse des 2ten Jahrs:

also Interesse des 2ten Jahrs $= \frac{ac}{100} + \frac{ac^2}{100^2}$

folgl. die Summe nach 2 Jahren =

$$a + \frac{ac}{100} + \frac{ac}{100} + \frac{ac^2}{100^2} =$$

$$= \frac{100^2 . a + 100c . a + c^2 a}{100^2} = a\left(\frac{100 + c}{100}\right)^2$$

eben so findet man die Summe nach 3 Jahren

$$= a\left(\frac{100 + c}{100}\right)^3$$

Es ist demnach die Summe nach n Jahren =

$$= x = a\left(\frac{100 + c}{100}\right)^n$$

die nemliche Formel aR^n ; nur wird, wenn wir sie logarithmisch zerlegen, ihr Ausdruck etwas ausführlicher, und zu anderen Aufgaben etwas bequemer; nemlich

log. x = log. a + n(log. (100 + c) — log. 100)

(wir wollen sie die Formel A nennen.)

Z. B. Es befand sich in einem Lande anfänglich eine Volksmenge von 100000 Menschen, und sie vermehrt sich jährlich um $\frac{1}{30}$; wie groß ist sie nach 100 Jahren?

Aufl. Anfängliche Volksmenge = 100000 = a
Nach dem erſten Jahre = $(1+\frac{1}{30})a = \frac{31}{30}a$
nach dem zweyten Jahre = $(\frac{31}{30})^2 a$
nach dem dritten Jahre = $(\frac{31}{30})^3 a$
alſo nach dem 100ten Jahre = $(\frac{31}{30})^{100} a$
Nun iſt
log. 31 — log. 30 = 0,01424043 9
mult. mit n oder 100 = 1,4240439
+ log. 100000 = 5,0000000
6,4240439
als log. von der Zahl 2654874
Alſo iſt nach 100 Jahren die Volksmenge um mehr als $26\frac{1}{2}$mal ſo groß geworden.

2ter Fall.

Es hat jemand ein Kapital von 100 fl. auf zuſammengeſetztes Intereſſe ausſtehen, und nach 15 Jahren werden ihm 300 fl. heimbezahlt; wie viel Intereſſe hat er genommen?

Aufl. Hier iſt a = 100; n = 15; x = 300
lx = l300 = 2,4771212
— la oder — l100 = 2,0000000
0,4771212
divid. durch n = 15 gibt lR = 0,0318080
davon iſt die natürliche Zahl R = 1,075 =
= r + 1, alſo r = 0,057 oder $r = \frac{75}{1000}$ d. i.
das Intereſſe iſt gerade $7\frac{5}{10}$ vom 100 geweſen.

Aus der vorigen Formel A flieſſet

$$\text{Log.}(100+c) = \frac{\text{log. x} - \text{log. a} + \text{n.log.100}}{\text{n}}$$

Daraus nun laſſen ſich folgende (und ihnen analog.) Aufgaben auflöſen:

*) Eine

*) Eine Summe x = 10000 fl. die erst nach n = 10 Jahren ohne Interesse verfällt, verkauft jemand um 6756 fl. es fragt sich, nach welchem Procent dieser Verkauf geschehen sey?

*) Nach der Sündfluth wurde die Erde nur durch 6 Menschen, nemlich Noahs 3 Söhne und ihre Frauen, bevölkert; nach Verlauf von 200 Jahren belief sich schon die Anzahl der Menschen auf 1 Million: es fragt sich, um welchen Theil, oder um wie viel vom 100, die Bevölkerung jährlich zunehmen mußte?

log. x = log. 1000000 = 6,0000000
+n.log.100=200log.100 = 400,0000000

406,0000000
— log. a = — log. 6 = — 0,7781512

405,2218488

divid. durch 200 gibt

log. (100+c) = 2,0261092

welches der log. von 106,2 beynahe ist.

Es ist demnach 100+c=106,2

nemlich c = 6,2

Also nahm die Bevölkerung damals (bey zumal guter Leibesbeschaffenheit und langen Lebensjahren dieser Menschen) jährlich um 6,2 vom 100 oder beynahe um den 16ten Theil zu.

Oder auch: man fragt insbesondere, um den wievielsten Theil sich die Menschen vermehrt haben?

Man setze diesen wievielsten Theil $= \frac{1}{x}$

so sind nach 200 Jahren $(\frac{1+x}{x})^{2006}$ Menschen da gewesen.

Nun

Nun iſt $(\frac{1+x}{x})^{2006} = 1000000$ folgl.

$$\frac{1+x}{x} = (\frac{1000000}{6})^{\frac{1}{200}}$$

$$\log.(\frac{1+x}{x}) = \frac{1}{200}.\log.\frac{1000000}{6}$$

$$= \frac{1}{200}.52218487 = 0{,}0261092$$

folgl. $\frac{1+x}{x} = \frac{1061963}{1000000}$

$$1000000 = 61910\,93x$$

$x = 16$ ungefehr.

(†. Hätten ſich aber die Menſchen in einem fort in dieſem Verhältniſſe 40 Jahre hindurch vermehrt, ſo wäre ihre Anzahl bis auf

$$1000000.\frac{1000000}{6} = 166666666666$$

angewachſen; eine Menge, zu deren Unterhaltung der Erdboden viel zu klein geweſen wäre.)

*) Man ſoll die jährliche Vermehrung der Menſchen finden, wenn ſich ihre Anzahl alle 100 Jahre verdoppelt.

Aufl. Man ſetze die jährliche Vermehrung der Menſchen $= \frac{1}{x}$ und ihre anfängliche Anzahl $= n$; ſo iſt die Menge derſelben nach 100 Jahren $= (\frac{1+x}{x})^{100}$ n da nun dieſe

Menge das Doppelte der anfänglichen Menge, also 2n seyn soll, so ist

$$\frac{1+x}{x} = 2^{\frac{1}{100}} \text{ und}$$

$$\log.\left(\frac{1+x}{x}\right) = \frac{1}{100}\log. 2 = 0{,}0030103$$

und daraus kommt

$$\frac{1+x}{x} = \frac{10069555}{10000000}$$

$$x = \frac{10000000}{69555} = 144 \text{ ungefehr.}$$

Es ist folgl. zur Verdoppelung der Menschenanzahl in jedem Jahrhunderte genug, wenn sie sich jährlich nur um den 144sten Theil vermehren.

3ter Fall.

Es ist ein Kapital $a = 1$ fl. ausgeliehen, und das Interesse wird gerechnet zu $r = 5$ Procent ($= \frac{1}{20}$ also $R = \frac{21}{20}$) Nach mehrerer Jahre Verlauf löset man 50 fl. ab $= x$; man suche also die Anzahl Jahre n; oder in wie viel Jahren 1 fl. mit dem zusammengesezten Interesse 50 fl. bringen werde?

Aufl. $lx = 1{,}6989700$

$-la = l.1 = 0{,}0000000$

$1{,}6989700$

dieses dividirt mit $lR = l\frac{21}{20} = 0{,}0211892$, gibt $80\frac{18}{100}$, als in welcher Anzahl Jahre 1 fl. die 50 fl. Interesse getragen hat.

Die obige Formel A gibt

$$n = \frac{\log. x - \log. a}{\log.(100+c) - \log. 100)}$$

(Ebenf. mit der Form der Tab. übereinstimmend.)

*) Es

*) Es legt jemand ein Kapital a = 1000 fl. zu c = 4 Procent, an und ſchlägt die Intereſſen jährlich zum Kapital: nun fragt ſich, in wie viel Jahren die ganze Summe 10000 fl. = x betragen werde.

Aufl. log. x = log. 10000 = 4,0000000
— log. a — log. 1000 = — 3,0000000
1,0000000
und log. (100 + c) = log. 104 = 2,0170333
— log. 100 = 2,0000000
0,0170333

$$\text{folgl. } n = \frac{1{,}0000000}{0{,}0170333} = \frac{10000000}{170333} = 59.$$

*) Man ſoll finden, in wie viel Jahren das menſchliche Geſchlecht auf das 10fache anwachſe, wenn die jährliche Vermehrung $= \frac{1}{100}$ iſt.

Aufl. Da die eigentliche Menſchenanzahl nicht ausgedrückt iſt, welche in der Formel a heißt, ſo kann die Aufgabe auch im Allgemeinen alſo aufgelöst werden:

Es ſey die Anzahl der Jahre, oder n = y ſo iſt die Anzahl der Menſchen nach y Jahren $= (\frac{101}{100}).^{y} a$

Da dieſelbe nun auch das 10fache von der anfänglichen Menge ſeyn ſoll, ſo iſt

$(\frac{101}{100}).^{y} a = 10a$

$(\frac{101}{100})^{y} = 10$

folgl. $y \log. (\frac{101}{100}) = \log. 10$

$$y = \frac{\log. 10}{\log. 101 - \log. 100} = \frac{10000000}{43214} = 231.$$

Nach 231 Jahren wird also die Anzahl der Menschen, wenn sie sich jährlich um den 100sten Theil vermehren, 10mal so groß; und folgl. nach 462 Jahren 100, und nach 693 Jahren 1000mal so groß.

4ter Fall.

Es ist jemand ein Kapital 12 Jahre schuldig geblieben, und hatte solches zu 5 Procent zu interessiren: zu Ende dieser 12 Jahre bezahlt er 1650 fl. Wie groß ist das Kapital gewesen?

$n = 12$; $R = \frac{21}{20}$; $x = 1650$

$\log. x = l. 1650 = 3,2174839$

$lR = 0,0211892$

und mit $n = 12$ multipl.

$nlR = 0,2542704$

dieses von l. x subtrahirt, bleibt

$\log. a = 2,9632135$

Von diesem Logar. ist die natürliche Zahl 918,7; daher war das Kapital beynahe $918\frac{3}{4}$ fl.

obige Formel A gibt

$\log. a = \log. x - n(\log.(100+c) - \log.100)$

*) Man soll finden, was eine Summe x gegenwärtig werth sey, welche erst nach n Jahren ohne Interesse zu bezahlen ist, das Interesse zu c Procent gerechnet.

*) Es will jemand ein Kapital anlegen, und die Interessen zu c Procent jährlich zum Kapital schlagen; nun will er nach $n = 20$ Jahren schon eine Summe von $x = 10000$ fl. haben; wie viel muß er gleich anfangs anlegen?

§. 344.

IIte Tafel.

Rabatt, oder wenn Kapital und Interesse voraus bezahlt werden.

Fall	gegeben.	Auflösung in natürl. Zahlen. gesucht	Auflös.	Auflösung in logarithm. Zahlen. gesucht	Auflös.
5	a; n; r	x	$\frac{a}{R^n}$	lx	la—nlR
6	a; n; x	R	$\sqrt[n]{\frac{a}{x}}$	lR	$\frac{la—lx}{n}$
7	a; x; r			n	$\frac{la—lx}{lR}$
8	x; n; r	a	xR^n	la	lx + nlR

Beyspiele.

5ter Fall.

*) Es hat jemand nach 15 Jahren 120 fl. mit zusammengesetztem Interesse zu 5 Procent zu bezahlen; wie viel hat er zu erlegen, wenn er die Bezahlung jezt gleich diesen Augenblick leisten will? (Antw. $57\frac{72}{100}$ fl.)

6ter Fall.

*) Es hat jemand in 15 Jahren 800 fl. zu bezahlen; er bezahlt es aber gleich anfangs mit Rabatt 500 fl. und tilget damit die ganze Schuld. Man soll finden, wie hier das Interesse gerechnet worden?

x = 800; a = 500; n = 15; man sucht R
l. a = l. 800 = 2,9030900
— l. x = — l. 500 = 2,6989700

Rest 0,2041199
und durch 15 dividirt, gibt 0,0136079
davon die natürliche Zahl = 1,031 = R
Da aber R = r + 1, und man folgl. 1 abzuziehen hat, so kommt r = 0,031. Daher war das Interesse = $\frac{31}{1000}$ oder $3\frac{1}{10}$ vom Hundert.

7ter Fall.

Es hat jemand in einer gewissen Anzahl von Jahren ein Kapital von 800 fl. abzutragen gehabt, mit dem Interesse zu 6 Procent; er hat aber durch Rabatt zum Voraus bezahlt 600 fl. und damit die Schuld abgethan; es fragt sich, wie viel Jahre es gewesen sind, in welchen er die 800 fl. hätte bezahlen sollen?
(Antw. $4\frac{237}{1000}$ oder, in der runden Zahl, in 5 Jahren.)

8ter Fall.

Es zahlt jemand mit Rabatt 1240 fl. für ein Kapital, welches in 8 Jahren erst zu bezahlen gewesen wäre, und zwar nach dem Interesse zu 6 Procent: man fragt, wie groß das Kapital gewesen sey? (R 1976 fl.)

§. 345.

Interusurium.

Hieher gehört nun also das eigentliche Interusurium, das wir noch weiter besonders erklären wollen. Wenn jährlich 5 Procent Zinßen bezahlt werden,

den, so betragen die Zinsen am Ende des Jahrs $\frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ des Kapitals. Nun sey Cajus mir am Ende eines Jahres ein gewisses Kapital zu bezahlen schuldig, welches = 1 heissen mag. Dieses will er mir aber jezt gleich baar bezahlen: allein auf solche Art werde ich ihm am Ende des Jahres $\frac{1}{20}$ an Zinsen schuldig; denn diese hätte er damit gewinnen können. Gesezt nun, Cajus rechne sogleich $\frac{1}{20}$ ab, und bezahle mir $1 - \frac{1}{20}$: so ist es so viel, als ob ich gleich jezt ein Kapital bezahle, das ich erst am Ende des Jahres schuldig bin. Daher muß mir Cajus am Ende des Jahres $\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{400}$ bezahlen. Allein Cajus will jezt auf einmal alles abrichten: gibt er mir aber jezt $1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400}$, so anticipirt er die Bezahlung von $\frac{1}{400}$, und ich bin gehalten, am Ende des Jahres ihm $\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{400} = \frac{1}{8000}$ an Zinsen zu bezahlen. Rechnet Cajus diese jezt gleich ab, und gibt mir $1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000}$; so anticipire ich die Bezahlung. Und dieses gehet ohne Aufhören also fort. Also ist das, was ich jezt mit Recht fordern kann, die Summe der unendlichen Reihe

$$1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{160000} - \frac{1}{3200000} \infty$$

weil Cajus von dem, was er mir gibt, allemal wieder $\frac{1}{20}$ abrechnen, und ich von dem abgerechneten wieder $\frac{1}{20}$ fordern kann. Man sezze in der Reihe §. 227. $x = 20$, so kommt

$\frac{1}{20} - \frac{1}{400} + \frac{1}{8000} \ldots = \frac{1}{21}$ und dies ist der Rabatt; und das wirklich zu zahlende Kapital $= 1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$

†) Man nennt dieses das Leibnitzische Interusurium, welches er schon Act. Erudit. 1683. Mens. Octob. p. 425. vorgetragen hat.

*) Cajus schickt dem Titius a fl. wovon jeder $\frac{1}{m}$ fl. Porto kostet. Dieses Porto ist er nicht zu bezahlen

schuldig, und weil es ihm also Titius doch wieder geben müßte, so will er es gleich jezt an der Summe abziehen: wie viel muß also Cajus wegen dieses Abzugs noch an Titius schicken?

Aufl. Das Porto für a ist $\frac{a}{m}$; also ist die Differenz $= a - \frac{a}{m}$; schickt also Cajus nur $a - \frac{a}{m}$, so hat er nicht das Porto von a, sondern von $a - \frac{a}{m}$ bezahlt, also muß er dem Titius das Porto von $\frac{a}{m}$ oder $\frac{a}{m} : m = \frac{a}{m^2}$ ersetzen, und diesem also schicken

$$a - \frac{a}{m} + \frac{a}{m^2}$$

aber nun muß wieder Cajus für das zugelegte $\frac{a}{m^2}$ das Porto bezahlen $= \frac{a}{m^2} : m = \frac{a}{m^3}$, und dieses zieht er dem Titius wieder ab; er schickt ihm also nur

$$a - \frac{a}{m} + \frac{a}{m^2} - \frac{a}{m^3}$$

und so wird das, was Cajus dem Titius schicken muß, durch die unendliche Reihe

$$a - \frac{a}{m} + \frac{a}{m^2} - \frac{a}{m^3} + \frac{a}{m^4} \ldots \infty$$

ausgedrückt werden, folglich ist der Abzug, den Cajus wegen des Porto machen kann,

$$\frac{a}{m} - \frac{a}{m^2} + \frac{a}{m^3} - \frac{a}{m^4} \ldots\ldots$$

$= a.$

$$= a.\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} - \frac{1}{m^4} \ldots\right)$$

$$= a.\frac{1}{m+1} = \frac{a}{m+1} \text{ fl.}$$

§. 346.

Aufgabe.

Ein Kapital a wird angelegt, und nach Verlauf eines jeden Jahres nicht nur mit ſeinen gefallenen Intereſſen zu 5 Procent, ſondern auch über dieſes noch mit einer Summe b vermehrt: wie groß wird das Kapital und die Zuſätze ſeyn, oder die ganze Summe s nach n Jahren?

Aufl. Der Anwachs des Kapitals a nach n Jahren iſt einmal =

$$= a.\left(\frac{100+c}{100}\right)^n$$

der Anwachs der Summe b, die nach Verlauf des erſten, oder im Anfang des 2ten Jahres angelegt wird, iſt

$$= b.\left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-1}$$

der Anwachs der Summe b, die nach Verfluß des 2ten Jahrs angelegt wird

$$= b.\left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-2}$$

nach Verlauf des 3ten Jahres

$$= b\left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-3}$$

nach Verlauf des vorlezten, oder im Anfange des lezten Jahres $= b\left(\frac{100+c}{100}\right)$

Diese Summen nun, auf welche die jährlich angelegten Theile b anwachsen, stehen in einer geometrischen Reihe, deren

gröstes Glied $= b\left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-1}$

kleinstes Glied $= b\left(\frac{100+c}{100}\right)$

gemeinschaftlicher Quotient $= \left(\frac{100+c}{100}\right)$

folglich die Summe aller dieser Glieder $=$

$$= b.\left(\frac{100+c}{100}\right)^{n-1}.\left(\frac{100+c}{100}\right) - b\left(\frac{100+c}{100}\right)$$

$$\left(\frac{100+c}{100}\right) - 1$$

$$= \frac{100.b}{c}.\left(\frac{100+c}{100}\right)^{n} - \frac{100b}{c} - 1$$

(nach der oben gegebenen Formel.)

Addiret man nun zu dieser jezt gefundenen Summe den ersten Ausdruck $\left(\frac{100+c}{100}\right)^{n}$,

so erhält man endlich

$$s = \left(\frac{ac+100b}{c}\right).\left(\frac{100+c}{100}\right)^{n} - \left(\frac{100b+bc}{c}\right)$$

für die gesuchte ganze Summe; oder

$$s = \text{der Zahl des log.}\left(\frac{ac+100b}{c}\right) + n.\log.\left(\frac{100+c}{100}\right) - b\left(\frac{100+c}{c}\right)$$

Diese

Dieſe ſo eben gefundene Formel iſt nicht weniger fruchtbar an anderen, eben ſo nüzlichen, die daraus flieſſen. Als:

$$a = s + b\left(\frac{100+c}{c}\right) - \frac{100b}{c}$$

$$\left(\frac{100+c}{100}\right)^n$$

$$b = \frac{cs - ac.\left(\frac{100+c}{100}\right)^n}{100.\left(\frac{100+c}{100}\right)^n - (100+c)}$$

$$n = \frac{\log.(cs+100b+bc) - \log.(ac+100b)}{\log.(100+c) - \log.100}$$

Sezt man nun $b = a$, ſo iſt

$$s = \left(\frac{100a+ac}{c}\right).\left(\frac{100+c}{100}\right)^n - \left(\frac{100a+ac}{c}\right)$$

$$a = \frac{cs}{(100+c).\left(\frac{100+c}{100}\right)^n - (100+c)}$$

$$n = \frac{\log.(cs+100a+ac) - \log.(100a+ac)}{\log.(100+c) - \log.100}$$

Um die Anwendung zu zeigen, ſey folgende Aufgabe:

*) Eine Summe $s = 10000$ fl. die nach $n = 20$ Jahren, ohne Intereſſe verfällt, ſoll dergeſtalt abgerichtet werden, daß durch dieſe 20 Jahre jährlich eine gleiche Summe a bezahlt wird: wie groß ſoll wohl dieſe Summe a ſeyn, wenn die Intereſſen zu 4 Procent vorgeſchrieben ſind?

Aufl. Die leztere Formel für a gibt den Zähler

$$cs = 40000$$

fer-

ferner ist $\log.(\frac{100+c}{100}) = \log.(\frac{104}{100}) =$

$= 0,0170333$

multipl. mit $n = \underline{\qquad 20}$

$0,3406660$

dazu add. $\log.(100+c) = \log.104 = \underline{2,0170333}$

$2,3576993$

wozu die Zahl 227,88 gehört. Davon 104 abgezogen, gibt 123,88 für den Nenner des Bruchs, von dem cs der Zähler ist. Die gesuchte jährliche Zahlung ist also

$= \frac{40000}{123,88} = 322,9$ fl.

denn 322,9 fl. zu 4 Procent angelegt, und nach Verfluß eines Jahres sowohl mit den gefallenen Interessen, als auch mit 322,9 fl. vermehrt, bringen in 20 Jahren eine Summe von 10000 fl.

§. 347.

IIIte Tafel.

Zihlerrechnung (Tagezeiten), oder diejenige Zahlungen, da ein gegebenes Kapital, jährlich in gewissen bestimmten gleichen Theilen, innerhalb einigen Jahren, nebst den Interessen nach und nach entrichtet wird.

Es können sich hiebey 2 Hauptunterschiede ereignen:

A.) Wenn man die Zihler sich summiren und aufschwellen läßet, und solche nachbezahlt.

Es

Es ſey das Zihl, oder das Quantum, was jährlich ſollte abgetragen werden, = a; die Anzahl der Jahre = n; das Verhältniß des Intereſſe = r; r + + 1 = R; die lezte Summe, welche zu bezahlen iſt = x.

Fall.	gegeben.	gesucht	Auflösung.	Auflösung in logarithmischen Zahlen.
9	a; r; R; n	x	$\frac{(R^n - 1)a}{r}$	$la + l(R^n - 1) - lr$
10	x; r; R; n	a	$\frac{rx}{R^n - r}$	$lr + lx - l(R^n - 1)$
11	x; r; R; a	n	$**$	$\frac{l(rx - a) - la}{lR}$
12	x; n; a	R	$\sqrt[n]{\frac{xR}{a} - \frac{a}{a} - x = 0}$	

Ein Beyſpiel ſey der 9te Fall.

Es hat jemand jährlich 150 fl. abzutragen, welches er bis zu Ende von 12 Jahren anſtehen läſſet; das Intereſſe iſt 5 Procent. Es fragt ſich, wie viel er zuſammen zu Ende dieſer Jahre zu erlegen habe?

Auflö-

Aufl. Hier ist $a = 150$; $R = \frac{21}{20}$; $r = \frac{1}{20}$; $n = 12$.
Vor allem aber ist die Grösse $R^n - 1$ und ihr Logarithmus zu finden, weil dieser auch in die folgende Fälle Einfluß hat.
Also $R = \frac{21}{20}$; $lR = 0{,}0211892$
Dieses mit 12 als der Jahre Zahl multiplicirt $0{,}2542715$; dessen natürliche Zahl ist $1{,}795$; davon 1 subtrah. gibt $R^n - 1 = 0{,}7958 = \frac{7958}{10000}$
Dieses Bruches Logar. wird gefunden, wenn
von $l.7958 = 3{,}9008039$
der $l.10000 = 4{,}0000000$ abgezogen wird, gibt
$l(R^n - 1) = -0{,}0991960$
Dieses vorausgesezt, ist nun
$la = l150 = 2{,}1760912$ hiezu addirt:
$l(R^n - 1) = -0{,}0991960$
Summe $2{,}0768952$; hievon abgezogen:
$lr = l\frac{1}{20} = -1{,}3010299$
$3{,}3779250$
Davon ist die natürliche Zahl, oder $x = 2387$. so viel muß nach 12 Jahren bezahlt werden.

*) Auf diese Weise sind die anderen in der Tafel angezeigten Fälle auch ohne Schwürigkeit aufzulösen, wenn nur einmal die Logarithmische Grösse $l(R^n - 1)$ bestimmt ist.

§. 348.

Begriff von den Renten. Zeitrenten. Leibrenten.

Wenn ein Eigenthümer eines Kapitals dieses an einen anderen zu gewissen Procent verleyhet, und der Schuldner bezahlt jährlich statt der gebührenden Zinsen noch etwas weiter: so wird jährlich ein Theil des Kapitals mit bezahlt, und in einer gewissen Zeit ist

das

das ganze Kapital nebst den Zinsen richtig abgetragen. Nun kann gleich anfangs der Vergleich gemacht werden, vermög dessen der Schuldner zwar alle Jahre ausser den Zinsen einen Theil des Kapitals zu zahlen sich verpflichtet; jedoch so, daß das, was der Glaubiger an Kapital und Zinsen empfangt, alle Jahre einerley Summe ausmache: und diese jährliche gleiche an den Glaubiger zu zahlende Summe heißt die Zeitrente, oder die Annuität.

Von diesen verabredeten Zeitrenten sind die Leibrenten unterschieden. Leibrenten sind Zahlungen, welche einer Person für einen gewissen Einsatz, auf Zeitlebens, jährlich entrichtet werden; es mag übrigens diese Person bald sterben, oder sehr alt werden.

Die Zeitrente muß so viele Jahre bezahlt werden, als man anfangs verabredet hat; und wenn der Käufer der Rente vorher stirbt, ehe diese Anzahl von Jahren verflossen ist, so muß die Rente an die Erben bezahlt werden. Allein die Hebung einer Leibrente höret mit dem Tode des Käufers auf. Bey der Zeitrente gehen Käufer und Verkäufer allemal völlig sicher, daß keiner von beyden verliert: wenn aber jemand einer einzigen Person eine Leibrente verkauffen wollte; so würde der Verkäufer hiebey zu viel Gefahr leiden. Daher werden solche Leibrenten nicht auf wenige, wohl aber auf einige 100 oder 1000 Personen verkauft. Die Berechnung ist eben so, wie bey einer Zeitrente; nur wird die Anzahl der Jahre, die der Käufer der Rente noch zu leben hat, muthmaßlich angenommen. Die Reihe der Jahre, innerhalb welchen die Hälfte der Anzahl einer solchen Gesellschaft stirbt, kann man als die mittlere Dauer des Lebens dieser Gesellschaft betrachten. Wenn man die Zahlen der Jahre, die jedes Mitglied für

sich

sich wahrscheinlich noch lebt, alle zusammen addirt, und die Summe durch die Anzahl der Personen dividirt, so kommt etwa eben diese Zahl von Jahren heraus, worinnen die Hälfte der Gesellschaft verstirbt: und nach dieser mittleren Dauer des Lebens der Leibrentengesellschaft richtet sich die Rente. Sie ist bey einerley Zinsen desto höher, je kürzer diese mittlere Dauer angenommen wird. So rechnet man gewöhnlich die mittlere Dauer des menschlichen Lebens zu London kürzer, als zu Paris; und daher kommt es, daß London höhere Leibrenten gibt, als Paris.

Eine Tontine ist eine besondere Art von Leibrentengesellschaft, die sich dadurch von der gewöhnlichen unterscheidet, daß ihr das Kapital und die Zinsen so lange ausbezahlt werden müssen, bis der lezte von der Gesellschaft verstorben ist; und zwar so, daß die Portionen der absterbenden denen, die am Leben bleiben, zufallen.

*) Hauptwerke hieher sind: Hr. Carl Chassot de Florencourt, Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst. Altenb. 1781. 4. Vornemlich: Hr. Jo. Nic. Tetens Prof. der Math. zu Kiel, Einleitung zu Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, die vom Leben und Tode einer oder mehrerer Personen abhangen. 8. 2 Thle. Leipz. 1785.

§. 349.

Aufgabe.

Es hat jemand eine jährliche Rente a durch n Jahre zu geniessen; er will aber diese Rente verkaufen; es fragt sich, was sie gegenwärtig werth sey, wenn die Interessen zu c Procent vorgeschrieben sind.

Aufl. Es sey ihr Werth = s,
so kann s als ein Kapital angelegt, und jährlich mit den Interessen zu c Procent vermehrt, in n Jahren eine Summe =

$$= s = \left(\frac{100 + c}{100}\right)^n$$

hervorbringen. (§. 343.)

Und die jährliche Rente a, da sie nach Verlauf des ersten Jahres angelegt, und jährlich sowohl mit den Interessen zu c Procent, als auch mit a vermehrt werden kann, bringt nach Verlauf eben dieser Zeit eine Summe =

$$= \left(\frac{100a + ac}{c}\right).\left(\frac{100 + c}{100}\right)^{n-1} - \frac{100a + ac}{c} - a$$

$$= \left(\frac{100a + ac}{c}\right).\left(\frac{100 + c}{100}\right)^{n-1} - \frac{100a}{c}.$$

(§. 346.)

Der Exponent muß in diesem Falle (n — 1) seyn, weil die Rente a, vermög der Voraussetzung erst im Anfange des 2ten Jahres angelegt, und folglich nur durch (n — 1) Jahre verzinst werden kann: auch muß a zum obigen Ausdruck addirt werden, weil nach Verlauf des nten Jahres auch noch ein a ohne Interesse fällt.

Nun muß

$$s.\left(\frac{100 + c}{100}\right)^n = \left(\frac{100a + ac}{c}\right).\left(\frac{100 + c}{100}\right)^{n-1} - \frac{100a}{c}$$

seyn, damit dem Gesetz Genüge

geschehe, welches die Interessen zu c Procent vorschreibt. Folglich

$$s = \frac{100a}{c} - \frac{100a}{c} \cdot \left(\frac{100}{100+c}\right)^n$$

*) Es will jemand seinem Freunde ein jährliches Auskommen a bey einer allgemeinen Lehnbank durch n Jahre anweisen; die Interessen bey dieser Bank sind zu c Procent festgesezt; wie viel muß er bey der Lehnbank einlegen?

Aus der obigen Formel folget:

1.) $$a = \frac{cs}{100 - 100\left(\frac{100}{100+c}\right)^n}$$

*) Es legt jemand eine Summe s bey einer allgemeinen Lehnbank mit der Bedingung an, daß er lebenslang jährlich eine gleiche Summe a von der Bank erhalte; wie groß muß die jährliche Summe a seyn, wenn die Bank seine Lebenszeit für n Jahre schäzt, und die Interessen zu c Procent zahlt?

*) Eine Schuld s, von welcher jährlich die Interessen zu c Procent zu entrichten sind, soll in n Jahren dergestalt getilget werden, daß jährlich eine gleiche Summe bezahlt werde: Wie groß muß diese Summe a seyn?

2.) $$n = \frac{\log.100a - \log.(100 - cs)}{\log.(100+c) - \log.100}$$

*) Es nimmt jemand eine Summe zu c Procent auf, und überläßt seinem Glaubiger eine jährliche Rente a, welche grösser ist, als das Interesse $\frac{cs}{100}$; nun fragt sich, durch wie viele

Jahre

Jahre der Glaubiger diese Rente mit Recht genieſſen könne?

*) Es hat jemand ein Kapital s von 100000 fl. zu c = 5 Procent angelegt; allein mit dem Interesse = 5000 fl. kann er seinen jährlichen Aufwand nicht bestreiten, sondern braucht jährlich eine Summe von a = 6000 fl. er ist also genöthigt, vom Kapitale jährlich so viel hinwegzunehmen, daß dieses samt dem gefallenen Interesse 6000 fl. beträgt; in wie viel Jahren wird alles gänzlich aufgezehrt seyn? (R in beynahe 36 Jahren.)

3.) $a = (a - \frac{cs}{100}) . (\frac{100+c}{100})^n$

oder $\log. a = \log. (a - \frac{cs}{100}) + n \log. (\frac{100+c}{100})$

*) Es nimmt jemand eine Summe = 10000 fl. auf, und verbindet sich, durch n = 6 Jahre, seinem Glaubiger jährlich eine gleiche Summe a = 2000 fl. zu bezahlen: nun ist die Frage, was für ein Interesse bey diesem Vergleich zum Grund gelegt worden sey?

Aufl. Die Formel sagt, es sey c = 5,47 beynahe. Das ist, wenn der Glaubiger die 2000 fl., die er nach Verlauf eines jeden Jahrs erhält, also gleich zu 5,47 Procent verzinset, und das Kapital immer mit den Interessen vermehret, so erhält er am Ende des 6ten Jahres eben das, was er haben würde, wenn er seine hingegebene Summe von 10000 fl. zu 5,47 Procent angelegt, und durch diese nemliche Zeit das Kapital jährlich mit den Interessen vermehret hätte.

†) Der Werth von c in der Formel kann entweder durch irgend eine Näherungsformel, oder auch durch Logarithmen bestimmt werden; wenn man nemlich eine Zahl nach der anderen statt c sezt, und dieses so lange versucht, bis der erste Theil der Gleichung dem 2ten Theile ziemlich genau gleich werde.

§. 350.
Aufgabe.

Es hat jemand 400000 fl. zu 5 Procent aufgenommen, trägt aber jährlich 25000 fl. ab; man soll finden, in wie viel Jahren er die ganze Schuld bezahlt haben werde?

Aufl. Man sezze die schuldige Summe der

400000 fl. = a

den jährlichen Abtrag der 25000 fl. = b

so ist er schuldig

nach dem ersten Jahre $\frac{105}{100}a - b$

nach dem 2ten Jahre $(\frac{105}{100})^2 a - (\frac{105}{100})b - b$

nach dem 3ten Jahre

$(\frac{105}{100})^3 a - (\frac{105}{100})^2 b - (\frac{105}{100})b - b$

und nach x Jahren, wenn man Kürze wegen $\frac{105}{100} = n$ sezt,

$n^x a - n^{x-1}b - n^{x-2}b - n^{x-3}b \ldots - b =$

$n^x a - b(1 + n + n^2 + \ldots + n^{x-1})$

Nun ist nach der Natur der geometrischen Progressionen

$$1 + n + n^2 + n^3 + \ldots + n^{x-1} = \frac{n^x - 1}{n - 1}.$$

Folg.

Folglich ist die nach x Jahren noch übrige Schuld, die nach der Aufgabe $=0$ seyn soll,

$$n^x a - \frac{n^x b + b}{n-1} = 0 \text{ und folglich}$$

$$n^x a = \frac{n^x b + b}{n-1} \text{ oder}$$

$$(n-1)n^x a = n^x b + b$$

daraus ergibt sich $(b - na + a)n^x = b$

$$n^x = \frac{b}{b - na + a}$$

$$\text{und endlich } x = \frac{\log. b - \log.(b - (n-1)a)}{\log. n}$$

Da nun $a = 400000$; $b = 25000$; $n = \frac{105}{100}$
so ist $(n-1)a = 20000$
$b - (n-1)a = 5000$
und die Zahl der Jahre, nach welchen die ganze Schuld bezahlt ist $=$

$$= x = \frac{l.\,25000 - l.\,5000}{l.(\frac{105}{100})}$$

$$= \frac{l.\,5}{l(\frac{21}{20})} = \frac{6989700}{211893}$$

oder etwas kleiner als 33.

Nach 33 Jahren nemlich wird nicht nur die ganze Schuld abgetragen seyn, sondern es muß alsdenn der Creditor dem Debitor noch wieder hinausgeben.

$$\frac{(n^{33} - 1)b}{n-1} - n^{33} a = \frac{(\frac{21}{20})^{33} \cdot 50 - 25000}{\frac{1}{20}} =$$

$$= 100000(\tfrac{21}{20})^{33} - 500000$$

Da also $\log. (\frac{21}{20}) = 0{,}021189299\,1$
so ist $\log. (\frac{21}{20})^{33} = 0{,}69924687$
und $\log. 100000(\frac{21}{20})^{33} = 5{,}69924687$ der Logarithmus von 500318,8.

Es muß demnach der Creditor dem Debitor nach 33 Jahren noch $318\frac{4}{5}$ fl. wieder hinausgeben.

§. 351.

B.) Rechnung, wenn die Zihler voraus auf einmal bezahlt werden; wo man wissen will, wie viel solche werth sind. (S. §. 347.)

Hier sind wieder zwey Arten:

1.) Wo nur einfaches Interesse gilt.

Alle Benennungen wie vorhin.

Fall	gegeben	gesuchtes	Auflösung.
13	a, r, n	x	$\frac{(nr-r+2)na}{2(1+nr)}$
14	x, r, n	a	$\frac{2x(1+nr)}{2n+(n-1)nr}$
15	x, n, a	r	$\frac{2na-2x}{(2x-na+a)n}$
16	x, r, a	n	$\frac{f\pm\sqrt{(f^2+8arx)}}{2ar}$

$f=2rx+ra-2a$

Es sey nach dem 13ten Falle die Aufgabe:

*) Es soll einer in 18 Jahren nach einander allezeit jährlich 50 fl. erlegen (hat also Zihler von 50 fl. auf 18 Jahre); er will aber die Bezahlung gleich anfangs auf einmal thun, und des Interesse zu 6 Procent, und zwar nur des einfachen wegen, den Empfänger auch befriedigen; es fragt sich, wie viel er auf einmal zu geben habe, daß es eben so viel ist, als ob er unter gedachten Bedingungen die Bezahlung nach und nach thue?

a=

$a = 50$; $n = 18$; $r = \frac{6}{100}$
ſo kömmt $x = 653\frac{1}{3}$ fl. (und bey 5 Procent Intereſſe wird $x = 701\frac{3}{5}$ fl.)

§. 352.

2te Art in Zahlung der Zihler, wenn man ſie voraus mit einander bezahlt, aber Intereſſen von Intereſſen, oder doppelte Zinſen rechnet.

Fälle	gegeben	gefuchtes	Auflöſ.
17	a, r, R, n	x	$\frac{a - \frac{a}{R^n}}{r}$
18	x, r, R, n	a	$\frac{xr'R^n}{R^n - 1}$
19	a, x, r, R	n	$\frac{la + l(R^n - r) - l(a - rx) - lr}{lR}$
20	a, x, n	R	$R^n + r - \frac{a}{x} = 0$

Aufloſungen in natürlichen Zahlen.

Aufloſungen in logarithmiſchen Zahlen.

gefuchtes	Auflöſung
lx	$la + l(R^n - r) - l(a - rx) - lr$
la	$lx + lr + nlR - l(R^n - r)$
n	$\frac{la + l(a - rx) - lr}{lR}$

$y^{**} + \frac{a}{y} - \frac{a}{r} = 0$

17ter

17ter Fall.

Es wird zu wissen verlangt, wie viel jemand, der in 8 Jahren jedesmal jährlich 50 fl. bezahlen muß, auf einmal zum voraus geben könne, daß es mit dieser successiven Bezahlung, und mit dem davon fallenden Interesse von Interessen, oder doppelten Zinsen, einerley sey? die Zinsen zu 6 Procent gerechnet.

Aufl. $a = 50$; $n = 18$; $R = \frac{106}{100}$

zuerst muß $R^n - 1 = R^{18} - 1$ bestimmt werden:

$lR = 0{,}0253058$, dieses mit 18 mult. oder

$nlR = 0{,}4555044$

davon ist die natürliche Zahl $= 2{,}854 = R^{18}$

$R^{18} - 1 = R^n - 1 = 1{,}854$ hievon der

Logarithm. $= 0{,}2681699$

Nun ist

$la = l50 = 1{,}6989700$ dazu addirt:

$l(R^n - 1) = 0{,}2681600$

Summe $1{,}9671499$

hievon $- nlR = 0{,}4555044$ abgezogen

Rest $1{,}5116444$; hievon ferner abgezogen $lr = - 1{,}2218487$ kommt

$lx = 2{,}7334931$

wovon die natürliche Zahl $x = 541{,}36$. So viele fl. sind zum voraus unter obigen Bedingungen abzutragen.

Werden die Interessen zu 5 Procent angenommen, so kommt $x = 584\frac{47}{100}$ fl. zu 4 Procent ist $x = 632\frac{95}{100}$ fl.

*) Man ersiehet aus der Auflösung des 13 und 17ten Falles, als welches die beyden gewöhnlichsten in den Bezahlungen sind, daß es bey den Zihlern nicht vortheilhaft sey für den, der die Bezahlung thut, wenn er geringe

ringe Intereſſen gibt; aber gegentheils auch nicht vortheilhaft für den, der die Bezahlung annimmt, wenn er ſich auf hohes Intereſſe geſezt hat. Denn je höher die auf einmal vorausbezahlte Summe in den Zinſen genüzt wird, je weniger darf der Bezahler erlegen; wie aus dieſem Schema erhellet, worinn zu erſehen iſt, wie viel jemand auf einmal voraus, nebſt dem Intereſſe zu bezahlen hat, wenn er, auf 18 Zihler oder Jahre, jährlich 50 fl. abzutragen ſchuldig wäre. Er bezahlt nemlich:

Intereſſe.	Mit einfachem Intereſſe.	Mit doppeltem Intereſſe.
zu 6 Procent	653,365	541,36
—5—	675 —	584,47
—4—	701,629	632,95
—3—	733,759	687,31
—2—	774,264	748,16

Anhang.

Formeln des Binomiums.

§. 353.

Da die Formel des Binomiums sowohl bey Reihen, als anderen algebraischen Rechnungen ungemein oft vorkommt, so erachte ich es nicht für unnüzlich; die verschiedene Formen und Fälle derselben theils aus dem Obigen auszuheben und hier zusammen zu stellen, theils noch mit neuen zu vermehren.

I. Die Generalformel vor $(a+b)^m$ ist

$$a^m + ma^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4 + \frac{m.m-1.m-2.m-3.m-4}{1.2.3.4.5}a^{m-5}b^5 + \ldots$$

Nun ist 1.) $ma^{m-1}b = a^m.m\frac{b}{a}$, und wenn man

$a^m = A$ sezt,

$$ma^{m-1}b = mA.\frac{b}{a}$$

2.) Es ist auch $\frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2 =$

$$= ma^{m-1}b.\frac{m-1}{2}.\frac{b}{a}$$

und

und wenn man $ma^{m-1}b = mA.\frac{b}{a} = B$ sezt,

$$\frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2 = \frac{m-1}{2}B.\frac{b}{a}$$

3.) eben so $\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}b^3 =$

$$= \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2.\frac{m-2}{3}.\frac{b}{a}$$

und wenn man $\frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2 =$

$$= \frac{m-1}{2}B.\frac{b}{a} = C \text{ sezt,}$$

$$\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}b^3 = \frac{m-2}{3}C.\frac{b}{a} \text{ u.s.w.}$$

Daraus entstehet folgende Abkürzung der Formel

II.) $(a+b)^m = a^m + mA.\frac{b}{a} + \frac{m-1}{2}B.\frac{b}{a} +$

$$+ \frac{m-2}{3}C.\frac{b}{a} + \frac{m-3}{4}D.\frac{b}{a} + \frac{m-4}{5}E.\frac{b}{a} + \ldots.$$

Und sezt man ferner $m = a$; $\frac{m-1}{2} = b$;

$\frac{m-2}{3} = c$; u. s. w. und $\frac{b}{a} = q$; so erhält man folgenden kürzesten Ausdruck:

III.) $(a+b)^m = a^m + aAq + bBq + cCq + dDq +$
$+ eEq + \ldots.$

Ist einer von den beyden Theilen der Wurzel negativ, so ist jede Dignität desselben, deren Exponent eine ungerade Zahl ist, negativ, jede andere Dignität von ihm aber positiv. Es kommt also die Formel vor $(a - b)^m$

IV.) $(a-b)^m = a^m - ma^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2 - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \ldots$

oder $a^m - mA.\frac{b}{a} + \frac{m-1}{2}B.\frac{b}{a} - \frac{m-1.m-2}{3}C.\frac{b}{a} + \ldots$

oder $a^m - aAq + bBq - cCq + dDq - \ldots$

Gibt man dem a und b bestimmtere Bedeutungen, z. B. es wird $a = 1$, so ist

V.) $(1+b)^m = 1 + mb + \frac{m.m-1}{1.2}b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}b^3 + \ldots$

Nun ist ferner $a+b = a(1+\frac{b}{a})$ und wenn man $\frac{b}{a} = q$ sezt, $= a(1+q)$

folglich ist auch $(a+b)^m = [a(1+q)]^m = a^m.(1+q)^m$

man erhält also die Formel:

VI.) $(a+b)^m = a^m(1 + mq + \frac{m.m-1}{1.2}q^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}q^3 + \ldots)$

Soll ein Binomium zu einer niederen Dignität erhoben werden, so ist

$(a+b)^{-m} = \frac{1}{(a+b)^m}$ und die Formel wird

VII.) $a^{-m} - ma^{-m-1}b + \frac{m.m+1}{1.2}a^{-m-2}b^2 - \frac{m.m+1.m+2}{1.2.3}a^{-m-3}b^3 + \ldots$

Weil

Weil $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ so ist auch

VIII.) $(a+b)^{-m} = \frac{1}{a^m} - m.\frac{b}{a^{m+1}} + \frac{m.m+1}{1.2}.$

$\frac{b}{a^{m+2}} - \frac{m.m+1.m+2}{1.2.3}.\frac{b}{a^{m+3}} + \ldots.$

und wenn man $m = \mathfrak{A}'$; $\frac{m.m+1}{1.2} = \mathfrak{B}'$;

$\frac{m.m+1.m+2}{1.2.3} = \mathfrak{C}' \ldots$ sezt, so kommt

IX.) $(a+b)^{-m} = \frac{1}{a^m} - \mathfrak{A}'.\frac{b}{a^{m+1}} + \mathfrak{B}'.\frac{b^2}{a^{m+2}} - \mathfrak{C}'.\frac{b^3}{a^{m+3}} + \ldots.$

Sezt man endlich $\frac{1}{a^m} = A'$; und die folgende Theile, wie sie da stehen $= B'$; C'; D' ꝛc. und $m = a'$; $\frac{m+1}{2} = b'$; $\frac{m+2}{3} = c'$ u. s. w. und endlich $\frac{b}{a} = q$, so kommt folgender kürzester Ausdruck:

X.) $(a+b)^{-m} = \frac{1}{a^m} - a'\mathfrak{A}'q + b'\mathfrak{B}'q - c'\mathfrak{C}'q + d'\mathfrak{D}'q - \ldots.$

Und diese Formeln sind deswegen sehr wichtig, weil man vermittelst ihrer gar leicht Brüche wie $\frac{1}{a+b}$; $\frac{1}{(a+b)^2}$; $\frac{1}{(a+b)^3}$; $\frac{1}{(a+b)^4}$ ꝛc. in unendliche Reihen auflösen kann.

So ist z. B.

$$\frac{1}{(a+b)^4} = \frac{1}{a^4} - 4\frac{b}{a^5} + \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{b^2}{a^6} - \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{b^3}{a^7} + \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{b^4}{a^8} - \ldots$$

$$= \frac{1}{a^4} - 4\frac{b}{a^5} + 10\frac{b^2}{a^6} - 20\frac{b^3}{a^7} + 35\frac{b^4}{a^8} - \ldots$$

Endlich wenn $a = 1$ ist, so ist

XI.) $$(1+b)^{-m} = \frac{1}{(1+b)^m} = 1 - mb + \frac{m.m+1}{1.2}b^2 - \frac{m.m+1.m+2}{1.2.3}b^3 \ldots$$

und folglich, da $a+b = a(1+\frac{b}{a})$ oder, wenn man $\frac{b}{a} = q$ sezt, $= a(1+q)$ ist; so kommt

XII.) $$(a+b)^{-m} = a^{-m}(1+q)^{-m} = a^{-m}(1 - mq + \frac{m.m+1}{1.2}q^2 - \ldots)$$

Wird b negativ, so werden alle Theile jeder niederen Dignität von $a - b$ positiv, weil alsdann in allen den Theilen, die negativ seyn würden, wenn b positiv wäre, eine ungerade, und also auch negative, Dignität von b vorkommt.

XIII.) Soll irgend eine Dignität eines Binomiums $a+b$ mit irgend einer anderen Dignität eben dieser Wurzel multiplicirt werden, so ist das Produkt

$$a^m + ma^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \ldots$$

man

man darf nemlich in der Formel allenthalben, sowohl in den Exponenten, als in den Coefficienten, m= der Summe der Exponenten der gegebenen Dignitäten sezen.

XIV.) Soll ferner irgend eine Dignität eines Binomiums $a+b$ durch irgend eine andere Dignität eben solcher Wurzel dividirt werden; so ist der Quotient:

$$a^m + ma^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \ldots.$$

wenn man in der Formel allenthalben, sowohl in den Exponenten als Coefficienten, m= der Differenz zwischen dem Exponenten des Divisors und dem Exponenten des Dividends sezt; oder = der Summe aus dem Exponenten des Divisors und dem Exponenten des Dividends, mit dem entgegen gesezten Zeichen genommen.

XV.) Soll endlich irgend eine Dignität eines Binomiums $a+b$ als eine Wurzel betrachtet, und von neuem zu irgend einer Dignität erhoben werden, so ist die gesuchte Dignität:

$$a^m + ma^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \ldots.$$

Man darf nemlich in der Formel allenthalben m= dem Produkte aus den Exponenten der gegebenen und der gesuchten Dignität sezen.

Weil ferner $a+b=(a+b)^1$ so ist auch

XVI.) $a+b=a^m\, ma^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1,2}a^{m-2}b^2 + \ldots.$

ein

ein allgemeiner Ausdruck für jede zweytheilige Grösse, wenn man $m = 1$ sezt; und demnach, da sich jede Grösse oder Zahl in zwey Theile theilen lässet, so ist es auch die allgemeine Formel für eine jede Grösse und Zahl überhaupt.

Ferner, da $\sqrt[n]{(a+b)^m} = (a+b)^{\frac{m}{n}}$ ist, so ist auch $\sqrt[n]{(a+b)^m} = a^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} a^{\frac{m}{n}-1} b +$

$$+ \frac{\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n}-1}{1 \cdot 2} a^{\frac{m}{n}-2} b^2 \ldots$$ oder wenn man

$\frac{m}{n} = r$ und $-\frac{m}{n} = -r$ sezt, so ist

XVII.) $\sqrt[n]{(a+b)^m} = a^r + r a^{r-1} b +$

$$+ \frac{r \cdot r-1}{1 \cdot 2} a^{r-2} b^2 + \ldots$$

und

XVIII.) $\sqrt[n]{(a+b)^{-m}} = a^{-r} - r a^{-r-1} b +$

$$+ \frac{r \cdot r+1}{1 \cdot 2} a^{-r-2} b^2 - \ldots$$

Ist nun $m = 1$, so ist $r = \frac{1}{n}$ und es kommt aus N. XVII.

XIX.) $\sqrt[n]{(a+b)} = a^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n} a^{\frac{1}{n}-1} b +$

$$+ \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}-1}{1 \cdot 2} a^{\frac{1}{n}-2} b^2 \ldots$$

und

und nach N. XVIII. kommt

XX.) $\sqrt[n]{(a+b)^{-1}} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a+b}\right)} = a^{-\frac{1}{n}} - \frac{1}{n}a^{-\frac{1}{n}-1}b + \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}+1}{1.2}a^{-\frac{1}{n}-2}b^2 \ldots$

also für $\sqrt{(a+b)}$ wo $n=2$, kommt

$$a^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}a^{\frac{1}{2}-1}b + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-1}{1.2}a^{\frac{1}{2}-2}b^2$$

$$= a^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}b + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{1.2}a^{-\frac{3}{2}}b^2 \ldots$$

und für $\sqrt{(a+b)^{-1}} = \sqrt{\left(\frac{1}{a+b}\right)}$ kommt

$$a^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}-1}b + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+1}{1.2}a^{-\frac{1}{2}-2}b^2 \ldots$$

$$= a^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}b + \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2}a^{-\frac{5}{2}}b^2 \ldots$$

Sezt man $\frac{m}{n} = r$, so wird aus N. XVII.

XXI.) $(1+b)^{\frac{m}{n}} = 1 + rb + \frac{r.r-1}{1.2}b^2 + \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3}b^3 + \ldots$

und aus N. XVIII. wird

XXII.) $(1+b)^{-\frac{m}{n}} = 1 - rb + \frac{r.r+1}{1.2}b^2 - \frac{r.r+1.r+2}{1.2.3}b^3 + \ldots$

XXIII.)

XXIII.) $(1+b)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}b + \frac{1.1-n}{1.2.n^2}b^2 +$

$$+\frac{1.1-n.1-2n}{1.2.3.n^3}b^3+\ldots.$$

XXIV.) $(1+b)^{-\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n}b + \frac{1.1+n}{1.2.n^2}b^2 -$

$$-\frac{1.1+n.1+2n}{1.2.3.n^3}b^3+\ldots.$$

und da $a+b = a(1+\frac{b}{a}) = a(1+q)$ wenn man $\frac{b}{a} = q$ sezt, so kommt

XXV.) $[a(1+\frac{b}{a})]^{\frac{1}{n}} = [a(1+q)]^{\frac{1}{n}} =$

$$= a^{\frac{1}{n}}.(1+\frac{1}{n}.\frac{b}{a}+\frac{1.1-n}{1.2.n^2}.\frac{b^2}{a^2}\ldots.)$$

$$= a^{\frac{1}{n}}.(1+\frac{1}{n}q+\frac{1.1-n}{1.2.n^2}q^2\ldots.)$$

und

XXVI.) $[a(1+\frac{b}{a})]^{-\frac{1}{n}} = [a(1+q)]^{-\frac{1}{n}} =$

$$= a^{-\frac{1}{n}}(1-\frac{1}{n}.\frac{b}{a}+\frac{1.1+n}{1.2.n^2}.\frac{b^2}{a^2}\ldots.)$$

$$= a^{-\frac{1}{n}}(1-\frac{1}{n}.q+\frac{1.1+n}{1.2.n^2}q^2\ldots.)$$

Druckfehler und andere Anmerkungen.

Vom Ersten Theile ist noch nachzuholen:
S. 109. Lin. 7. lies: mit der halben Zahl der Glieder.
8. del. $2n+n(n-1)d$
III. — II. für $a=\frac{u-a}{n-1}$ lies: $d=\frac{u-a}{n-1}$

Im zweyten Theile.
S. 3. Lin. 5. für: der Divisor lies: den Divisor.
S. 26. Lin. 4. für $\pm\sqrt{\sqrt{[(\frac{b}{2})^4+b^2]}}$

lies: $\pm\sqrt{[\sqrt{(\frac{b}{2})^4+b^2]}}$

S. 38. Lin. 15. für: $(4t-9)t$ lies: $(4t+9)t$
S. 40. Lin. 13. für: $2=x-1$ lies: $2=x-8$
S. 44. Lin. 10. für: $x^2=y^2+40y+400$
lies: $x^2=y^2-40y+400$
S. 46. Lin. 8. für: $\sqrt{\sqrt{[(\frac{b^2}{4}-a^2)}}$ ꝛc.

lies: $\sqrt{[\sqrt{(\frac{b^2}{4}-a^2)}}$ ꝛc.

9. für: $\sqrt{\sqrt{[(144)+37]}}$
lies: $\sqrt{[\sqrt{(144)+37]}}$
S. 75. Lin. 28. für: $(\frac{3a^2}{m^2n}+\frac{b^3}{n^3})b$ lies: $(\frac{3a^2}{m^2n}+\frac{b^2}{n^3})b$
S. 86. Lin. 16. 17. für: $\frac{a^3}{9}$ lies: $\frac{a^3}{27}$
N. Um die Summe $y^3-\frac{a^2y}{3}+by+\frac{2a^3}{27}-\frac{ba}{3}=c$ zu erhalten, hat man vorher die Gleichung $ax^2=ay^2-\frac{2a^2y}{3}+\frac{a^3}{27}$ durch a zu dividiren.

S. 110. Lin. 28. für: $a^2+4ac+4c^2-9b$
lies: $a^2+4ac+4c^2-9b^2$

S. 114. Lin. 8. für: $\frac{3}{13\sqrt{13}}$ lies: $\frac{5}{13\sqrt{13}}$

S. 116. Lin. 3. für: $q-\frac{r}{x}$ lies: $-q-\frac{r}{x}$

S. 126. Lin. 17. für: $\frac{m^2-m}{2a}a^{m-1}\cdot\left(\frac{N-a^n}{ma^{m-1}}\right)$
lies: $\frac{m^2-m}{2a}a^{m-2}\cdot\left(\frac{N-a^m}{ma^{m-1}}\right)$

S. 127. Lin. 10. für: 1,25921 lies: 1,259921

S. 137. Lin. 9. für: positiv und werden
lies: und positiv werden.

S. 142. Lin. 8. für: $\frac{3}{4-1}$ lies: $\frac{3}{4-3}$

S. 152. Lin. 20. für: $\frac{\frac{b}{a}=o}{m-1}$ lies: $\frac{\frac{b}{a}-o}{m-1}$

S. 167. Lin. 9. für: $x(x^2-a)^2$ lies: $x(x-a)^2$

S. 190. Lin. 20. für: $\frac{4-m}{2-m}$ lies: $\frac{4-m}{m-2}$

S. 193. Lin. 18-21. del. durch dieses Mittel — als man will.

S. 207. Lin. 10. für: $(n^2+2n+1$ lies: (n^2+2n+1)

N. Bey den Lehren von den figurirten Zahlen, den Reihen und Combinationen ist das neueste und Hauptwerk anzuführen ausser Acht gelassen worden: Die Rechnung des Wahrscheinlichen aus dem Französischen des Hrn. *C. F. de Bicquilley* übersezt, und mit Anmerkungen versehen von Chr. Fr. Rüdiger. Leipz. 1788.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Roesler, Gottlieb Friedrich, 1740-1790

Allgemein faßliche Anleitung zur Algebra durch häufige Beyspiele erläutert; zu Ergänzung des mündlichen Unterrichts

Bd.: 2

Stuttgart (1789)

Math.p. 477-2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10137866-8
VD18 90246233